به نام خدا

المپیاد فیزیک رزونانس
پاییز ۱۴۰۵
سهراب ملکی

# اپتومتری و فیزیک چشم

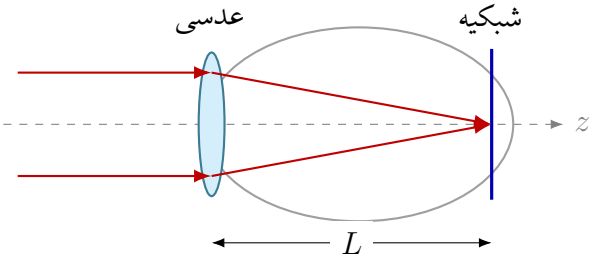
چشم انسان دستگاهی اپتیکی است که تصویر اجسام را روی شبکیه تشکیل می‌دهد. در این مسئله می‌خواهیم با استفاده از یک مدل ساده، عملکرد چشم و برخی اختلالات بینایی را بررسی کنیم و برای اصلاح آن‌ها عینک طراحی کنیم.
در سراسر مسئله، مگر آنکه خلاف آن گفته شود، چشم را به‌صورت یک عدسی نازک همگرا با توان اپتیکی متغیر در نظر بگیرید. شبکیه در فاصلهٔ ثابت

$$L = \frac{۱}{۶۰}\,\mathrm{m}$$

پشت عدسی قرار دارد. این فاصله، فاصلهٔ مؤثر در مدل اپتیکی ساده‌شدهٔ چشم است، نه طول واقعی کرهٔ چشم.
توان اپتیکی عدسی را با $\Phi = ۱/f$ نمایش می‌دهیم. واحد توان اپتیکی، دیوپتر است:

$$۱\,\mathrm{D} = ۱\,\mathrm{m}^{-۱}.$$

چشم می‌تواند با تغییر شکل عدسی، توان اپتیکی خود را افزایش دهد. این فرایند را **تطابق** می‌نامیم. توان چشم در حالت استراحت کمینه است و چشم می‌تواند آن را تا مقدار معینی افزایش دهد.
دید واضح زمانی اتفاق می‌افتد که تصویر دقیقاً روی شبکیه تشکیل شود.




## ۱. نزدیک‌بینی و دوربینی

دو فرد جوان **الف** و **ب** را در نظر بگیرید که توان اپتیکی چشم آن‌ها در حالت استراحت به‌ترتیب برابر است با

$$\Phi_{\mathrm{A,min}} = ۶۱/۵\,\mathrm{D}, \qquad \Phi_{\mathrm{B,min}} = ۵۸/۵\,\mathrm{D}.$$

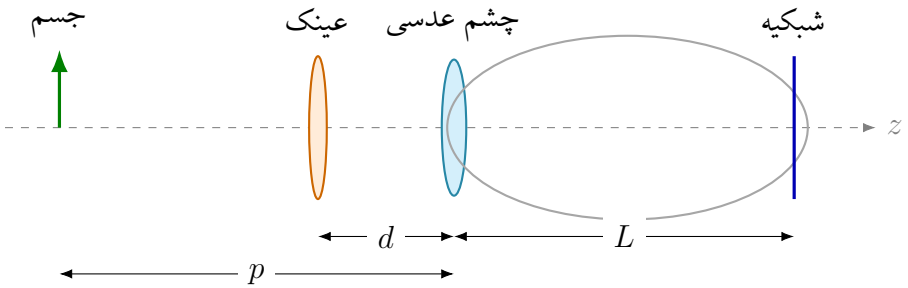
هر دو فرد می‌توانند با تطابق، توان چشم خود را حداکثر به‌اندازهٔ ۱۰ D افزایش دهند.
برای هر فرد، بازهٔ فاصله‌هایی را که می‌تواند اجسام را بدون عینک واضح ببیند، تعیین کنید. مشخص کنید کدام‌یک نزدیک‌بین و کدام‌یک دوربین است.
آیا ممکن است فردی دوربین باشد، ولی در آزمایش دید دور، بدون عینک عملکرد کاملاً طبیعی داشته باشد؟ آیا همهٔ افراد دوربین می‌توانند اجسام بسیار دور را واضح ببینند؟ توضیح دهید.

## ۲. طراحی عینک

اکنون می‌خواهیم با قرار دادن یک عدسی نازک در جلوی چشم، عیوب انکساری آن را اصلاح کنیم.
فرض کنید توان اپتیکی چشم $\Phi_e$ و توان عدسی عینک $\Phi_l$ است. عدسی عینک در فاصلهٔ $d$ جلوی عدسی معادل چشم قرار دارد و جسم در فاصلهٔ $p > d$ از چشم قرار گرفته است.
شرطی برحسب

$$\Phi_e, \quad \Phi_l, \quad d, \quad p, \quad L$$

به دست آورید که برای تشکیل تصویر واضح جسم روی شبکیه لازم باشد.




با استفاده از رابطهٔ به‌دست‌آمده، برای هر یک از دو فرد قسمت قبل عینکی طراحی کنید که بتواند **در حالت استراحت چشم** اجسام بسیار دور را واضح ببیند.
ابتدا فرض کنید $d = ۰$ و سپس محاسبات را برای

$$d = ۱۲\ \mathrm{mm}$$

تکرار کنید.
آیا می‌توان عینک معمولی یک فرد را بدون تغییر توان اپتیکی آن با لنز تماسی جایگزین کرد؟
پس از استفاده از عینک‌هایی که برای فاصلهٔ ۱۲ mm طراحی کرده‌اید، نزدیک‌ترین فاصله‌ای را که هر فرد می‌تواند اجسام را واضح ببیند، تعیین کنید.

## ۳. پیرچشمی و عینک مطالعه

توان اپتیکی چشم فردی در حالت استراحت ۶۰ D است. این فرد در جوانی می‌توانسته با تطابق، توان چشم خود را حداکثر ۱۰ D افزایش دهد.
با افزایش سن، این مقدار به ۱٫۵ D کاهش یافته است، درحالی‌که توان چشم در حالت استراحت تغییری نکرده است.
بررسی کنید این تغییر چه اثری بر نزدیک‌ترین فاصلهٔ دید واضح فرد می‌گذارد.
برای آنکه فرد بتواند کتابی را در فاصلهٔ ۲۵ cm از عدسی معادل چشم مطالعه کند، عینکی طراحی کنید که در فاصلهٔ ۱۲ mm جلوی چشم قرار بگیرد. فرض کنید هنگام مطالعه، چشم از حداکثر توان تطابق خود استفاده می‌کند.
آیا فرد می‌تواند با همین عینک، اجسام بسیار دور را نیز واضح ببیند؟

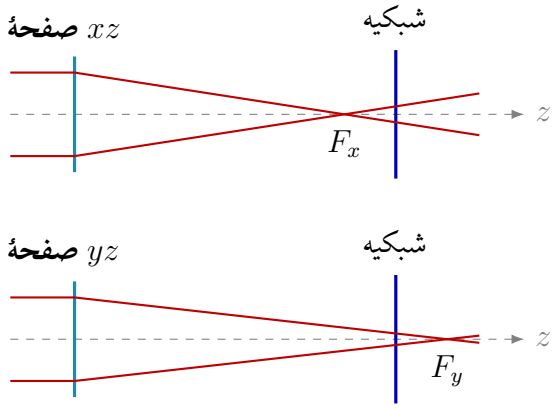
## ۴. آستیگماتیسم

تا اینجا فرض کردیم چشم در تمام جهت‌ها توان اپتیکی یکسانی دارد. اما در برخی چشم‌ها، توان اپتیکی در دو صفحهٔ عمود بر هم متفاوت است.
مدل ساده‌ای از چنین چشمی را در نظر بگیرید که در صفحهٔ $xz$ مانند عدسی‌ای با توان $\Phi_x$ و در صفحهٔ $yz$ مانند عدسی‌ای با توان $\Phi_y$ عمل می‌کند.

محور $z$ محور اپتیکی چشم است.
فرض کنید

$$\Phi_x = ۶۱\,\mathrm{D}, \qquad \Phi_y = ۵۹\,\mathrm{D}$$

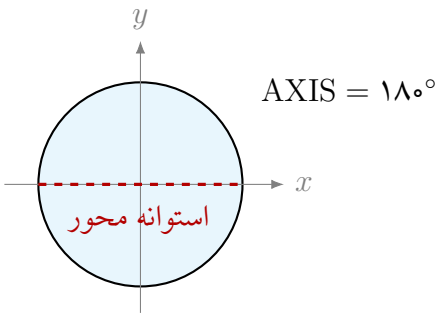
و چشم در حالت استراحت قرار دارد.
دسته‌ای از پرتوهای موازی با محور اپتیکی، از مردمکی دایره‌ای به شعاع $R$ وارد چشم می‌شوند.
محل تمرکز پرتوها را در هر یک از دو صفحهٔ $xz$ و $yz$ پیدا کنید. آیا تمام پرتوها در یک نقطه جمع می‌شوند؟
شکل هندسی مقطع دسته‌پرتوها را در صفحه‌ای عمود بر محور اپتیکی، در فاصلهٔ دلخواه $z$ از عدسی به دست آورید.
آیا صفحه‌ای وجود دارد که مقطع دسته‌پرتوها در آن دایره‌ای باشد؟ اگر چنین است، موقعیت آن را تعیین کنید و بررسی کنید که آیا این صفحه بر شبکیه منطبق است یا خیر.




نمای شماتیک مسیر پرتوها در دو صفحهٔ عمود بر هم. فاصله‌ها به مقیاس رسم نشده‌اند.

## ۵. اصلاح آستیگماتیسم

برای اصلاح آستیگماتیسم می‌توان از ترکیب عدسی کروی و عدسی استوانه‌ای استفاده کرد.
عدسی کروی در تمام جهت‌ها توان یکسانی دارد. در مقابل، یک عدسی استوانه‌ای نازک در راستای محور استوانه توان اپتیکی صفر، و در راستای عمود بر آن توان اپتیکی مشخصی دارد.




برای چشم قسمت قبل، عینکی طراحی کنید که تصویر یک جسم بسیار دور را دقیقاً روی شبکیه تشکیل دهد.
در این قسمت، فاصلهٔ عینک تا عدسی معادل چشم را صفر فرض کنید.
آیا می‌توان این چشم را فقط با یک عدسی کروی اصلاح کرد؟
توان عدسی کروی، توان عدسی استوانه‌ای و جهت محور استوانه را برای عینک مناسب تعیین کنید.
نشان دهید که می‌توان همان عینک را با دو ترکیب متفاوت از عدسی کروی و استوانه‌ای ساخت.

## ۶. خواندن نسخهٔ چشم‌پزشکی

در نسخه‌های عینک معمولاً از چهار کمیت زیر استفاده می‌شود:

$$\text{SPH}, \qquad \text{CYL}, \qquad \text{AXIS}, \qquad \text{ADD}.$$

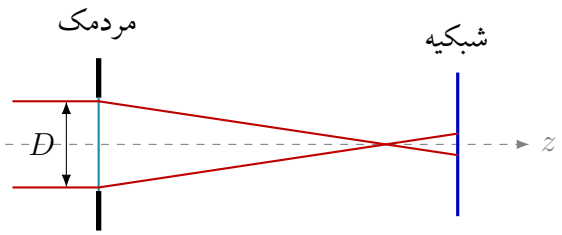
SPH توان بخش کروی عدسی و CYL توان بخش استوانه‌ای آن است.
AXIS زاویهٔ محور استوانه نسبت به راستای افقی است؛ یعنی راستایی که بخش استوانه‌ای در آن توان صفر دارد.
ADD مقدار توان کروی اضافه‌شده برای دید نزدیک نسبت به عینک دید دور است.
در جدول زیر OD چشم راست و OS چشم چپ را نشان می‌دهد. تمام توان‌ها برحسب دیوپتر هستند.

| چشم | SPH | CYL | AXIS | ADD |
|---|---|---|---|---|
| OD | $-۲/۰۰$ | $-۱/۰۰$ | $۱۸۰^\circ$ | $+۱/۵۰$ |
| OS | $+۱/۰۰$ | $-۰/۷۵$ | $۹۰^\circ$ | $+۱/۵۰$ |

با استفاده از این نسخه، توان اپتیکی عینک هر چشم را در دو راستای اصلی آن به دست آورید.
اگر عینک به عدسی معادل چشم چسبیده باشد و نسخه برای دید دور در حالت استراحت چشم تنظیم شده باشد، توان اپتیکی خود چشم را در هر راستا محاسبه کنید و مشخص کنید هر چشم چه نوع عیب انکساری دارد.
نسخهٔ بالا را با استفاده از عدسی‌های استوانه‌ای با توان مثبت، به شکلی معادل بازنویسی کنید.
در نهایت، نسخهٔ عینک مطالعهٔ همین فرد را بنویسید.

## ۷. چرا کوچک کردن مردمک دید را بهتر می‌کند؟

به چشم فرد الف از قسمت اول بازگردید. فرض کنید این فرد بدون عینک و در حالت استراحت، به جسمی بسیار دور نگاه می‌کند.
مردمک را دایره‌ای با قطر $D$ فرض کنید. از ابیراهی‌های عدسی صرف‌نظر کنید.
چون تصویر دقیقاً روی شبکیه تشکیل نمی‌شود، پرتوهای یک منبع نقطه‌ای، به‌جای یک نقطه، ناحیه‌ای روشن روی شبکیه ایجاد می‌کنند.
شعاع این ناحیه را برحسب قطر مردمک به دست آورید. با استفاده از نتیجهٔ خود، توضیح دهید که چرا نگاه کردن از یک سوراخ کوچک می‌تواند دید افراد نزدیک‌بین را بهبود دهد.




بااین‌حال، اگر قطر مردمک بسیار کوچک شود، پراش نور اهمیت پیدا می‌کند.
برای نور تک‌فام با طول موج $\lambda$، شعاع تقریبی لکهٔ پراش روی شبکیه برابر است با

$$r_{\text{diff}} \simeq ۱/۲۲ \frac{\lambda L}{D}.$$

برای تخمین اثر هم‌زمان تاری هندسی و پراش، شعاع مؤثر لکهٔ نور را به‌صورت

$$r_{\mathrm{eff}} = \sqrt{r_{\mathrm{geo}}^{۲} + r_{\mathrm{diff}}^{۲}}$$

در نظر بگیرید.
قطر مردمکی را که این شعاع را کمینه می‌کند، به دست آورید و مقدار عددی آن را برای

$$\lambda = ۵۵۰\,\mathrm{nm}$$

محاسبه کنید.
آیا کوچک‌تر کردن مردمک همواره دید را بهتر می‌کند؟