به نام خدا

المپیاد فیزیک رزونانس
پاییز ۱۴۰۵
سهراب ملکی

ابیراهی رنگی و ساخت عدسی آکرومات

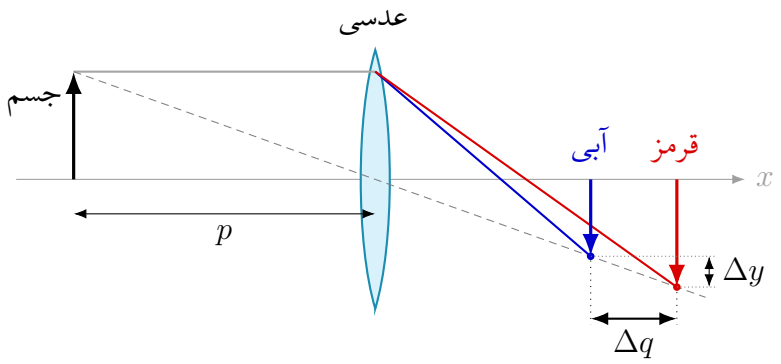
سؤال اول: تصویرهایی با رنگ‌های متفاوت

ضریب شکست مواد معمولاً به طول موج نور بستگی دارد. در نتیجه، فاصلهٔ کانونی یک عدسی نیز برای نورهایی با طول موج‌های مختلف، متفاوت خواهد بود. این پدیده موجب می‌شود که نورهای تشکیل‌دهندهٔ تصویر یک جسم، دقیقاً در یک نقطه متمرکز نشوند. به این پدیده، **ابیراهی رنگی** می‌گوییم.
یک عدسی نازک همگرا را در نظر بگیرید که فاصلهٔ کانونی آن تابعی از طول موج است:

$$f = f(\lambda).$$

جسمی به شکل یک پیکان، به ارتفاع H، در فاصلهٔ p از عدسی قرار دارد. فرض کنید عدسی را با دو نور قرمز و آبی بررسی می‌کنیم و فاصله‌های کانونی آن‌ها به‌ترتیب f_{R} و f_{B} هستند، به‌طوری‌که

$$0 < f_{\mathrm{B}} < f_{\mathrm{R}}.$$



۱. با استفاده از رابطهٔ عدسی نازک، فاصلهٔ تصویر از عدسی و ارتفاع تصویر را برای هر یک از دو رنگ به دست آورید. فرض کنید $p > f_{\mathrm{R}}$ است.

۲. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، تصاویر قرمز و آبی در فاصله‌های متفاوتی از عدسی تشکیل می‌شوند. به اختلاف مکان آن‌ها در راستای محور نوری، **ابیراهی رنگی طولی** می‌گوییم.
مقدار این اختلاف را به‌صورت

$$\Delta q = |q_{\mathrm{R}} - q_{\mathrm{B}}|$$

برحسب p، f_{R} و f_{B} به دست آورید.

۳. علاوه بر محل تشکیل تصویر، ارتفاع دو تصویر نیز یکسان نیست. اختلاف ارتفاع تصاویر را به‌صورت

$$\Delta y = |H'_{\mathrm{R}} - H'_{\mathrm{B}}|$$

تعریف می‌کنیم.

این کمیت را برحسب پارامترهای مسئله به دست آورید. توجه کنید که در این قسمت، ارتفاع تصاویر را در صفحهٔ تصویر متناظر با هر رنگ مقایسه می‌کنیم، نه روی یک پردهٔ مشترک.

۴. فرض کنید ارتفاع جسم و مشخصات عدسی ثابت هستند و می‌توانیم فاصلهٔ جسم از عدسی را تغییر دهیم.

وابستگی Δq و Δy را به فاصلهٔ جسم بررسی کنید.

آیا فاصله‌ای متناهی وجود دارد که در آن ابیراهی طولی یا اختلاف عرضی تصاویر بیشینه شود؟

رفتار این دو کمیت را در حدهای

$$p \longrightarrow f_{\mathrm{R}}^{+}, \qquad p \longrightarrow \infty$$

بررسی کنید و نتیجه را توضیح دهید.

۵. حال یک پرده را در محل تصویر نور قرمز قرار می‌دهیم. بنابراین تصویر قرمز روی پرده واضح خواهد بود، ولی نور آبی لزوماً در همان نقطه متمرکز نمی‌شود.

فرض کنید شعاع دهانهٔ عدسی برابر a باشد. با استفاده از پرتوهایی که از نقاط مختلف عدسی عبور می‌کنند، شعاع لکه‌ای را که نور آبی روی این پرده ایجاد می‌کند به دست آورید.

توضیح دهید که چرا اختلاف ارتفاع دو تصویر در صفحه‌های کانونی متفاوت، الزاماً به معنای جابه‌جایی مرکز لکه‌های رنگی روی یک پردهٔ مشترک نیست.

سؤال دوم: ساخت عدسی آکرومات

همان‌طور که در سؤال قبل دیدیم، پاشندگی نور باعث می‌شود که رنگ‌های مختلف در مکان‌های متفاوتی متمرکز شوند. اکنون می‌خواهیم سامانه‌ای از عدسی‌ها بسازیم که تا حد امکان این مشکل را برطرف کند.
برای یک عدسی نازک در هوا، کمیت **توان عدسی** را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

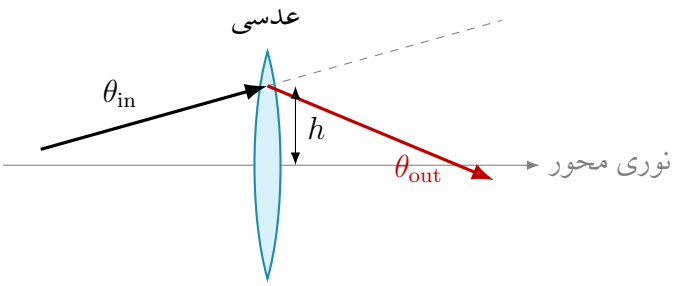
$$\boxed{\Phi := \frac{۱}{f} = (n-۱)\left(\frac{۱}{R_۱} - \frac{۱}{R_۲}\right).}$$

در این رابطه، $R_۱$ و $R_۲$ شعاع‌های انحنای علامت‌دار دو سطح عدسی و n ضریب شکست مادهٔ سازندهٔ آن هستند.
در تمام قسمت‌های این سؤال از تقریب پرتوهای نزدیک به محور استفاده کنید:

$$\sin\theta \simeq \tan\theta \simeq \theta.$$

الف) عدسی چگونه جهت نور را تغییر می‌دهد؟

پرتویی با زاویهٔ کوچک θ_{in} نسبت به محور نوری، در ارتفاع h از یک عدسی نازک عبور می‌کند.



نشان دهید که تغییر زاویهٔ پرتو برابر است با

$$\boxed{\theta_{\text{out}} - \theta_{\text{in}} = -\frac{h}{f} = -h\Phi.}$$

دقت کنید که تغییر زاویه، مستقل از زاویهٔ اولیهٔ پرتو است.

ب) فاصلهٔ کانونی معادل

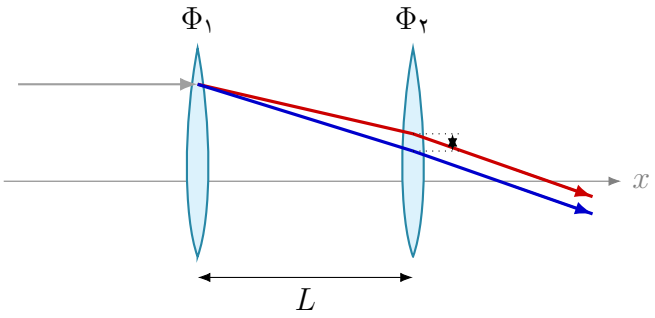
جعبهٔ سیاهی را در نظر بگیرید که یک پرتو موازی با محور نوری را، هنگام عبور در ارتفاع اولیهٔ h، به اندازهٔ $\delta\theta$ به سمت محور منحرف می‌کند.
برای چنین سامانه‌ای کمیت زیر را **فاصلهٔ کانونی معادل** تعریف می‌کنیم:

$$\boxed{f_{\text{eq}} := \frac{h}{\delta\theta}.}$$

نشان دهید که در مورد یک عدسی نازک معمولی، این تعریف همان فاصلهٔ کانونی آشنای عدسی را نتیجه می‌دهد.

پ) ترکیب دو عدسی

اکنون دو عدسی نازک با توان‌های $\Phi_۱$ و $\Phi_۲$ را در فاصلهٔ L از یکدیگر قرار می‌دهیم.
پرتویی موازی با محور نوری، در ارتفاع h به عدسی اول برخورد می‌کند.



ابتدا ارتفاع پرتو هنگام رسیدن به عدسی دوم و سپس زاویهٔ خروجی آن را به دست آورید.
نشان دهید که توان معادل سامانه برابر است با

$$\boxed{\Phi_{\text{eq}} = \Phi_۱ + \Phi_۲ - L\Phi_۱\Phi_۲.}$$

بنابراین

$$f_{\text{eq}} = \frac{۱}{\Phi_{\text{eq}}}.$$

ت) آیا یکسان‌بودن جهت کافی است؟

از آنجا که ضریب شکست به طول موج وابسته است، توان‌های دو عدسی نیز ممکن است تابع طول موج باشند:

$$\Phi_۱ = \Phi_۱(\lambda), \qquad \Phi_۲ = \Phi_۲(\lambda).$$

می‌خواهیم سامانه را طوری طراحی کنیم که نورهای با طول موج نزدیک به یک طول موج مرجع $\lambda_۰$، پس از عبور از عدسی‌ها تقریباً در یک جهت حرکت کنند.
نشان دهید که شرط این خواسته، تا مرتبهٔ اول تغییرات طول موج، برابر است با

$$\boxed{\left.\frac{d\Phi_{\text{eq}}}{d\lambda}\right|_{\lambda_۰} = ۰.}$$

آیا برقراری این شرط برای منطبق‌شدن مسیر پرتوهای رنگ‌های مختلف کافی است؟
به شکل توجه کنید: ممکن است دو پرتو جهت یکسانی داشته باشند، ولی از ارتفاع‌های متفاوتی خارج شوند.

ث) شرط انطباق کامل مسیر پرتوها

علاوه بر زاویهٔ خروجی، می‌خواهیم ارتفاع پرتو هنگام خروج از عدسی دوم نیز، تا مرتبهٔ اول، مستقل از طول موج باشد.
با استفاده از نتیجهٔ قسمت «پ»، نشان دهید که اگر عدسی اول پاشندگی غیرصفر داشته باشد، این شرط مستلزم

$$\boxed{L = ۰}$$

است.

بنابراین از این پس دو عدسی را **چسبیده به یکدیگر** فرض می‌کنیم.

ج) آیا دو عدسی از یک ماده کافی‌اند؟

ابتدا فرض کنید هر دو عدسی از یک ماده با ضریب شکست $n(\lambda)$ ساخته شده‌اند، ولی شعاع‌های انحنای آن‌ها می‌تواند متفاوت باشد.
نشان دهید که شرط

$$\frac{d\Phi_{\mathrm{eq}}}{d\lambda} = ۰$$

برای ماده‌ای با پاشندگی غیرصفر، به رابطهٔ

$$\Phi_۱ = -\Phi_۲$$

منجر می‌شود.
توان معادل این سامانه چقدر است؟
آیا چنین سامانه‌ای می‌تواند نقش یک عدسی همگرای با فاصلهٔ کانونی متناهی را ایفا کند؟

چ) ساخت عدسی آکرومات واقعی

برای رفع مشکل قسمت قبل، این بار دو عدسی را از دو مادهٔ متفاوت با ضریب شکست‌های

$$n_۱(\lambda), \qquad n_۲(\lambda)$$

می‌سازیم.
دو ثابت هندسی زیر را تعریف کنید:

$$K_i = \frac{۱}{R_{۱i}} - \frac{۱}{R_{۲i}}, \qquad i = ۱, ۲.$$

توان هر عدسی برابر است با

$$\Phi_i(\lambda) = K_i\big(n_i(\lambda) - ۱\big).$$

شرط لازم برای آنکه سامانه در اطراف طول موج مرجع $\lambda_۰$ آکرومات باشد را برحسب $K_۱$، $K_۲$ و مشتق ضریب شکست دو ماده بنویسید.
اگر بخواهیم توان کل سامانه در طول موج مرجع برابر مقدار دلخواه $\Phi_۰ > ۰$ باشد، دو معادله برای تعیین $K_۱$ و $K_۲$ به دست آورید.
توضیح دهید که چرا استفاده از دو ماده با پاشندگی‌های متفاوت می‌تواند ساخت عدسی آکرومات با توان غیرصفر را ممکن کند.

ح) عدد آبه

برای یک مادهٔ شفاف، عدد آبه را با استفاده از دو طول موج مرجع آبی و قرمز به‌صورت

$$V = \frac{n(\lambda_۰) - ۱}{n(\lambda_{\mathrm{B}}) - n(\lambda_{\mathrm{R}})}$$

تعریف می‌کنیم.
می‌خواهیم توان معادل دو عدسی چسبیده، در دو طول موج λ_{B} و λ_{R} یکسان باشد.

نشان دهید که این شرط به رابطهٔ

$$\boxed{\frac{\Phi_۱(\lambda_۰)}{V_۱}+\frac{\Phi_۲(\lambda_۰)}{V_۲}=۰}$$

منجر می‌شود.
اگر توان کل سامانه برابر $\Phi_۰ > ۰$ باشد و $V_۱ > V_۲ > ۰$، توان هر یک از عدسی‌ها را محاسبه کنید.
کدام عدسی باید همگرا و کدام‌یک باید واگرا باشد؟