

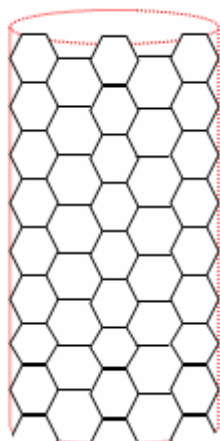
بسمه تعالی

آزمون اول المپیاد فیزیک (تابستان 1401)

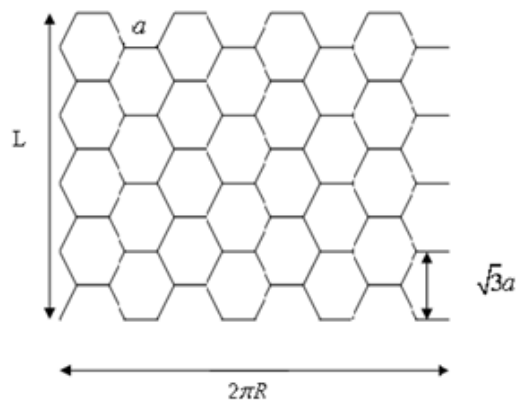
1401/5/27 مدت: 4 ساعت

1) پتانسیل الکتریکی ساختار نانولوله‌ای

صفحه‌ای مطابق شکل (الف) با شبکه شش‌گوشی (گرافن‌گونه) به طول L و عرض $2\pi R$ در نظر بگیرید به طوری که با لوله کردن این صفحه، استوانه‌ای به شعاع R مانند شکل (ب) به دست می‌آید. به این نانوساختار، نانولوله دسته‌سندلی (آرمچیر) می‌گویند که در موقعیت رئوس شش‌ضلعی‌ها، اتم‌هایی با بار الکتریکی q قرار گرفته‌اند و لبه استوانه به صورت دسته‌سندلی است. مبدا مختصات را در قسمت پایین روی محور استوانه و فاصله هر دو بار الکتریکی را a در نظر بگیرید.



شکل (ب)



شکل (الف)

آ مقدار پتانسیل الکتریکی را در یک نقطه‌ی دلخواه $(0,0,z)$ روی محور ساختار نانولوله برحسب ثابت‌های معرفی شده در مساله به دست آورید.

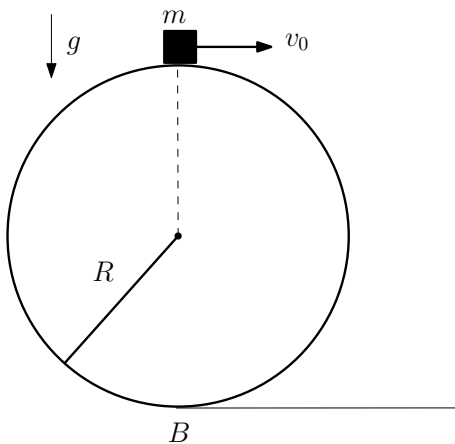
ب) اگر نسبت مساحت جانبی استوانه به مساحت یک شش ضلعی (یا به عبارت دیگر تعداد کل شش ضلعی‌ها) را N بنامیم در این صورت مقدار پتانسیل الکتریکی را در حالت حدی $L > a \gg z$ در نقطه z روی محور نانولوله برحسب ثابت‌های معرفی شده در مساله به دست آورید.

پ) با فرض اینکه $L \gg a$ باشد حلقه‌ها خیلی به هم نزدیک می‌شوند. در این حالت، پتانسیل الکتریکی بخش (آ) را می‌توان به صورت انتگرال نوشت. در این صورت مقدار پتانسیل الکتریکی را در حالت حدی $L \gg z$ در نقطه z روی محور نانولوله برحسب ثابت‌های معرفی شده در مساله به دست آورید.

$$\text{راهنمایی: } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + b^2})$$

ت) بدون مشتق‌گیری، مقدار بیشینه پتانسیل الکتریکی را به دست آورید؟

ث) اگر یک الکترون با بار e و جرم m مقید باشد که روی محور نانولوله حرکت کند در این صورت شتاب حرکت آن را تعیین نمایید.



(2) کره‌ای به شعاع R مطابق شکل روی یک سطح افقی، ساکن نگه داشته شده است. جسم کوچکی در بالاترین نقطه کره قرار دارد. از اصطکاک بین جسم و سطح کره چشم‌پوشی کنید. بر اثر یک ضربه افقی، جسم با سرعت اولیه v_0 شروع به حرکت می‌کند.

(آ) کمترین مقدار سرعت اولیه، $v_{\min}$ ، چقدر باشد تا جسم پس از پرتاب به سطح کره برخورد نکند؟

(ب) نیروی عمودی سطح وارد بر جسم در لحظه پرتاب به ازای $v_0 = v_{\min}$ چقدر است؟

(پ) به ازای $v_0 = v_{\min}$ فاصله محل برخورد جسم به زمین تا نقطه B چقدر است؟

اکنون طوری به جسم به صورت افقی ضربه می‌زنیم که $0 < v_0 < v_{\min}$ باشد. در این صورت جسم مقداری روی سطح کره می‌خورد و سپس از سطح کره جدا می‌شود. از اصطکاک بین جسم و سطح کره چشم‌پوشی کنید. در این صورت انرژی مکانیکی که مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل گرانشی جسم (mgh) است پایسته خواهد بود.

(ت) برخلاف جسمی که روی یک سطح شیب‌دار تخت می‌خورد نیروی عمودی سطح وارد بر جسمی که روی سطح کره می‌خورد در طول مسیر همواره ثابت نیست بلکه با زاویه θ متغیر است که θ زاویه شعاع واصل به محل لحظه‌ای جسم با مثلاً راستای قائم (خط‌چین) است. $N(\theta)$ را مادامی که جسم با سطح کره تماس دارد به دست آورید.

(ث) در لحظه‌ای که جسم از سطح کره جدا می‌شود $N(\theta) = 0$ است. در لحظه جدا شدن جسم از سطح کره $\cos \theta$ و مقدار سرعت جسم را به دست آورید.

(ج) فاصله محل برخورد جسم به زمین تا نقطه B چقدر است؟

3) در یک ظرف مسی به جرم m_{cu} مقداری آب به جرم m_w وجود دارد که با هم در تعادل گرمایی هستند و دمای شان T_0 ($0 < T_0 < 100^\circ C$) است. تکه‌ای یخ به جرم m_i که دمای آن T_i ($T_i < 0^\circ C$) است داخل ظرف می‌اندازیم. مدتی صبر می‌کنیم تا تعادل گرمایی بین اجزای تشکیل دهنده این دستگاه ترمودینامیکی برقرار شود. در حین فرایند شرایط طوری است که گرمایی از خارج با دستگاه مبادله نمی‌شود. بر حسب این که مقادیر عددی جرم‌ها و دماهای داده شده چقدر باشند وضعیت های مختلفی ممکن است اتفاق بیفتد. همه وضعیت‌های ممکن را جداگانه مشخص کنید و دمای تعادل دستگاه و نیز جرم آب و یخ را پس از ایجاد حالت تعادل به دست آورید.

گرمای ویژه مس، آب و یخ به ترتیب c_{cu} ، c_w و c_i و گرمای نهان ذوب یخ l_{iw} است.

4) دماسنج‌های مقاومتی که بر اساس تغییر مقاومت الکتریکی فلزات با دما ساخته شده‌اند، می‌توانند گستره وسیعی از دما را اندازه‌گیری کنند. معمولاً برای این منظور از پلاتین استفاده می‌شود زیرا خالص کردن آن نسبتاً آسان است و خلوص آن کارایی‌اش را در دماهای پایین افزایش می‌دهد. به علاوه نقطه ذوب پلاتین بالا (1770°C) است. دقت دماسنج مقاومتی پلاتینی در بازه دمایی -200°C تا 1200°C بسیار زیاد است.

اگر T مقیاس دمای مطلق (دمایی که دماسنج استاندارد نشان می‌دهد) بر حسب سلسیوس باشد، رابطه مقاومت الکتریکی بر حسب T به صورت زیر است

$$R = \begin{cases} R_0(1 + aT + bT^2) & 0 \leq T < 1200^{\circ}\text{C} \\ R_0(1 + aT + bT^2 + cT^3(T - 100)) & -200 < T < 0^{\circ}\text{C} \end{cases}$$

در ادامه، مقادیر عددی کمیت‌های خواسته شده را تا پنج رقم معنی‌دار محاسبه کنید.

(آ) برای به دست آوردن ثابت‌های R_0 ، a و b به سه نقطه ثابت دماسنجی نیاز است. با استفاده از داده‌های جدول زیر که از تجربه به دست آمده‌اند، ثابت‌های R_0 ، a و b را به دست آورید.

$R(\Omega)$	$T(^{\circ}\text{C})$
99.996	0
119.784	50
139.271	100

(ب) اگر ثابت $c = -3.1831 \times 10^{-12} (^{\circ}\text{C})^{-4}$ باشد وقتی مقاومت الکتریکی قرائت شده به وسیله این دماسنج 87.977Ω است دما چقدر است؟ مقادیر عددی R_0 ، a و b را همان مقادیر به دست آمده از قسمت قبل در نظر بگیرید. برای به دست آوردن دما یعنی حل معادله درجه سوم از روش اختلال تا مرتبه اول، $T = T^{(0)} + cT^{(1)} + \dots$ استفاده کنید.

(پ) اگر به جای مقیاس دمای مطلق، یک مقیاس دمای خطی مقاومتی مانند θ به صورت $R = \alpha\theta + \beta$ تعریف کنیم نیاز به دو نقطه ثابت دماسنجی برای تعیین ثابت‌های α و β داریم. فرض کنید در دمای ذوب یخ $\theta_1 = 0^{\circ}\text{C}$

مقاومت الکتریکی $R_i = 99.996 \, \Omega$ و در دمای تبخیر آب $\theta_s = 100 \, ^\circ\text{C}$ مقاومت الکتریکی $R_s = 139.271 \, \Omega$ باشد. در این مقیاس دما در چه دمایی $R = 119.784 \, \Omega$ است؟

ت) اگر یک دمای دلخواه در بازه $0 \leq T < 1200 \, ^\circ\text{C}$ در نظر بگیریم و اختلاف بین دماهایی که این دو دماسنج گزارش می‌دهند را به صورت

$$\theta - T = C_1 \left(\frac{T}{100} \right)^2 + C_2 \left(\frac{T}{100} \right)$$

بنویسیم ثابت‌های C_1 و C_2 را به دست آورید.

ث) به ازای $T = 500 \, ^\circ\text{C}$ اختلاف $\theta - T$ چقدر است؟

بسمه تعالی

آزمون دوم المپیاد فیزیک (تابستان 1401)

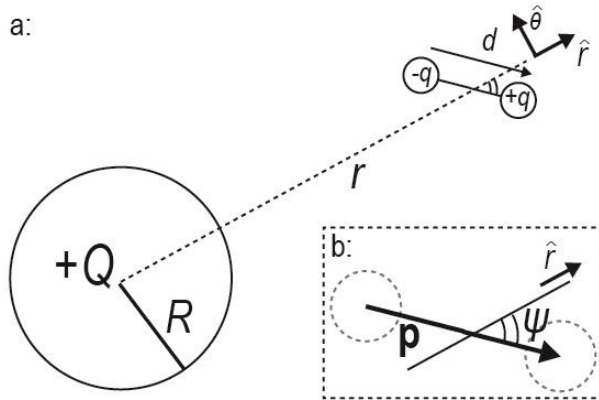
1401/5/28 مدت: 4 ساعت

1) تغییر فشار ناشی از دوقطبی ملکولی آب در حضور ذرات باردار

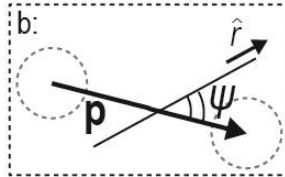
ریز ذرات پلاستیکی، بسیاری از پروتئین‌ها، و ... در داخل محیط آبی، بار خالص الکتریکی به دست می‌آورند؛ این یعنی عوامل بارداری (مثلا با بار کل $-Q$) از سطح آن‌ها جدا می‌شوند، و آنچه باقی می‌ماند، ذره‌ای با بار خالص $+Q$ خواهد بود. برای سادگی، چنین ذره‌ای را به صورت کره‌ای به شعاع R ، و بار خالص $+Q$ ، در نظر می‌گیریم، که در داخل آب خالص غوطه‌ور است. و برای سادگی بیشتر، از احتمال حضور هر نوع ماده‌ی یونی (مثلا نمکی که در آب حل شده باشد، یا برخی ملکول‌های آب که خود به OH^- و H^+ تجزیه شده باشند) صرف‌نظر می‌کنیم. پس مسئله‌ی ما تنها از یک کره‌ی باردار تشکیل شده که در دریایی بی‌کران از آب غوطه‌ور است؛ یعنی محیط آبی از هرسو تا بی‌نهایت گسترش یافته است. در چنین حالتی، تنها راه برهم‌کنش کره‌ی باردار، با ملکول‌های آب، از طریق دوقطبی (و در تقریب بالاتر، چهارقطبی) ملکول‌های آب می‌باشد. ما می‌خواهیم اثر ناشی از برهم‌کنش کره‌ی باردار، با دوقطبی ذاتی ملکول‌های آب را در چند مرحله محاسبه‌نماییم. چگالی ملکولی آب (یعنی تعداد ملکول بر واحد حجم) را ρ_w فرض می‌کنیم.

۱- فرض کنید یک دوقطبی الکتریکی مطابق شکل، در حضور میدان یک بار نقطه‌ای $+Q$ قرار دارد. در این صورت نیروی خالصی که از سوی بار نقطه‌ای به دوقطبی وارد می‌شود را محاسبه کنید. فرض کنید d ، فاصله‌ی میان دو

a:



بار مثبت و منفی در دوقطبی، بسیار کوچک‌تر از r ، فاصله‌ی دوقطبی تا مرکز بار $+Q$ است، و جواب را در دوجبه‌ت $\hat{r}$ و $\hat{\theta}$ تا اولین مرتبه‌ی غیرصفر (برحسب d/r) به دست آورید. (۴ نمره)



شکل (۱) **a:** دوقطبی الکتریکی $\vec{p} = q\vec{d}$ که در فاصله‌ی r از مرکز کروی باردار قرار گرفته‌است. دقت کنید که بردار دوقطبی $\vec{p}$ از سمت بار منفی به مثبت می‌باشد. درون شکل **b:** زاویه‌ی میان بردار دو قطبی $\vec{p}$ با

در ادامه‌ی مسئله، و برای راحتی کار، فرض کنید که در تمام حالت‌ها $\psi = 0$ باشد. در این صورت نیرویی که به هر ملکول آب وارد می‌شود، تنها در جهت بردار شعاعی خواهد بود.

$$2- \text{دیفرانسیل حجم } dV = r^2 dr \sin(\theta) d\theta d\phi$$

در کروی را در نظر بگیرید؛ در این جا r همان فاصله‌ی از مرکز کروی باردار، θ زاویه‌ی قطبی، و ϕ زاویه‌ی سمتی دستگاه کروی می‌باشند. داخل این دیفرانسیل حجم پر از ملکول‌های آب است، نیروی خالص $d\vec{F}$ که از طرف کروی باردار به دیفرانسیل حجم وارد می‌شود، را محاسبه نمایید. فرض کنید تمام ملکول‌های آب دو قطبی الکتریکی مساوی $\vec{P} = P_0 \hat{r}$ را دارا می‌باشند (۱ نمره)

با توجه به نیروی خالصی که به هرالمان حجم آب وارد می‌شود، فشار آب در نقاط مختلف فضا متفاوت خواهد بود. اما از آنجایی که مسئله حول کروی باردار تقارن کروی دارد، فشار آب تنها تابعی از فاصله از مرکز کروی باردار خواهد بود، $\Pi = \Pi(r)$ (از حرف یونانی پی برای نشان دادن فشار استفاده می‌کنیم، تا با نمادی که برای دوقطبی الکتریکی انتخاب کرده‌ایم، اشتباه نشود).

۳- با نوشتن تعادل نیروها برای المان حجم در بخش قبل، رابطه‌ی بین فشار در نقاط مختلف $\Pi(r)$ و $\Pi(r + dr)$ با نیروی الکتریکی وارد بر دیفرانسیل حجم به دست بیاورید. (۲ نمره)

در مرحله‌ی نهایی از این واقعیت تجربی استفاده می‌کنیم، که (اصطلاحاً) آب یک دی‌الکتریک خطی است؛ یعنی بردار دوقطبی در هر نقطه با میدان الکتریکی (که در غیاب آن وجود می‌داشته‌است) متناسب می‌باشد:

$$\vec{P}_w = \alpha \vec{E}$$

محاسبه‌ی دقیق α کار پیچیده‌ای است، که ما وارد آن نمی‌شویم.

۴- بُعد α را در دست‌گاه SI مشخص نمایید. (۱ نمره)

از سوی دیگر میدان الکتریکی در هر نقطه از فضا، نه تنها ناشی از کروی باردار، بلکه ناشی از اثر تک‌تک ملکول‌های آب نیز می‌باشد، که حالا هرکدام یک دوقطبی الکتریکی شده‌اند، و میدان مربوط به خود را ایجاد می‌کنند. اما می‌توان نشان داد که دست‌آخر تمام این اثرها خود را به صورت یک مقدار موثر برای α نشان می‌دهند، یعنی بعد از در نظر گرفتن تمام این اثرها، دوقطبی الکتریکی هر ملکول آب در حضور کروی باردار به صورت $\vec{P}_w = \alpha' \vec{E}_0$ می‌باشد، که α' یک مقدار موثر است، و $\vec{E}_0$ میدان الکتریکی خالص کروی باردار است. با فرض دانسته‌بودن α' :

۵- $\Pi(r)$ را به دست بیاورید. (۳ نمره)

راهنمایی: ممکن فرض‌هایی از مسئله صریح گفته نشده باشند، این برعهده‌ی خود شما است، که با دانش فیزیکی که آموخته‌اید، در هنگام حل تصویری سازگار و صحیح ارایه نمایید. درعین‌حال، در صورت نیاز می‌توانید از انتگرال‌های زیر استفاده نمایید:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \text{cte},$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \text{ArcTan}(x) + \text{cte},$$

$$\int \frac{1}{x(1+x)} dx = \text{Ln}\left(\frac{x}{x+1}\right) + \text{cte}.$$

(2) در دوران جنگ جهانی دوم وظیفه زیردریایی‌های آلمانی حمله به کشتی‌های تجاری بود. زیردریایی‌ها در آن دوران روی سطح آب مثل کشتی حرکت می‌کردند و وقتی لازم می‌شد کمی به زیر سطح آب می‌رفتند. البته زیر آب سرعتش کمتر بود و اگر کسی در سطح آب و بسیار نزدیک به زیردریایی بود می‌توانست آن را ببیند. تا مدتی زیردریایی‌ها موفق بودند و کشتی‌های تجاری را غرق می‌کردند و از رسیدن آن‌ها به مقصد جلوگیری می‌کردند. وظیفه‌ی کشتی‌های جنگی متفقین محافظت از کشتی‌های تجاری و حمله به این زیردریایی‌ها بود. کشتی‌های جنگی فقط وقتی زیردریایی در نزدیکی‌شان بود می‌توانستند آن را مشاهده کنند و اگر به مکانی درست بالای زیردریایی می‌رسیدند می‌توانستند با رها کردن بمب آن را نابود کنند.

در یکی از روزهای جنگ جهانی دوم یک کشتی جنگی از متفقین و یک زیردریایی آلمانی که از دو جبهه متخاصم بودند، هم‌زمان روی سطح آب و در فاصله‌ای بودند که می‌توانستند هم‌دیگر را ببینند. دستورالعمل کاپیتان زیردریایی این بود که به زیر سطح آب برود و با بیش‌ترین سرعت ممکن در یک جهت تصادفی و در خطی مستقیم از منطقه دور شود. متفقین از دستورالعمل کاپیتان زیردریایی آلمانی و بیش‌ترین سرعت زیردریایی آگاه شده بودند ولی نمی‌دانستند که زیردریایی در چه جهتی حرکت می‌کند.

بیش‌ترین سرعت زیردریایی زیر آب را u و سرعت کشتی جنگی را v ($v > u$) و فاصله‌ی اولیه‌ی آن‌ها در سطح آب را l بگیرید. هنگامی که زیردریایی زیر آب می‌رفت نمی‌توانست به عمق آب برود و هم‌واره در نزدیکی سطح آب می‌ماند.

دستورالعملی به کاپیتان کشتی داده شد که چه‌گونه در مسیری حرکت کند که حتما زمانی در آینده درست بالای سر زیردریایی باشد.

می‌خواهیم ببینیم آن دستورالعمل چه بود؟ محل اولیه‌ی زیردریایی را نقطه‌ی O مبدأ مختصات

و محل اولیه کشتی جنگی را نقطه‌ی A با فاصله‌ی l از آن و روی محور x بگیرید. زیردریایی به زیر سطح آب می‌رود در یک جهت تصادفی و شعاعی از نقطه‌ی O با سرعت u دور می‌شود.

الف- فرض کنید وقتی زیردریایی به زیر سطح آب رفت، کاپیتان زیردریایی در انتخاب مسیر تصادفی بدترین تصمیم ممکن را بگیرد و مستقیم به طرف کشتی جنگی بیاید. در این صورت کشتی جنگی چه مدت باید صبر کند تا زیردریایی به زیر کشتی برسد؟

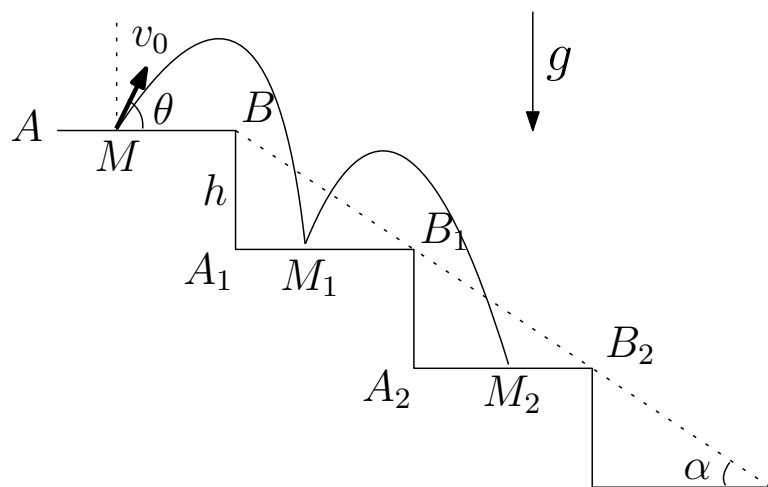
ب- اما قاعداً کاپیتان زیردریایی بدترین تصمیم ممکن را نمی‌گیرد و وقتی زیردریایی به زیر سطح آب رفت مستقیم در یک جهت تصادفی حرکت می‌کند. فرض کنید کاپیتان کشتی جنگی این را می‌داند. در این صورت فکر می‌کنید کاپیتان کشتی جنگی چه باید بکند تا بتواند پس از مدتی حتماً بالای سر زیردریایی باشد تا بتواند آن را غرق کند؟ دو بند زیر را در نظر بگیرید؟

ب-۱- مسیر کشتی چه باید باشد؟

ب-۲- بردار سرعت کشتی بر حسب زمان چه باید باشد؟

راه‌نمایی: بخشی از دستورالعمل این بوده که کشتی مدتی سر جای خودش بایستد و سپس در مسیری خاص حرکت کند. اگر از دستگاه قطبی استفاده کنید مسئله ساده‌تر می‌شود.

ج- حالا فرض کنید که کاپیتان زیردریایی هم از دستورالعمل کاپیتان کشتی جنگی مطلع می‌شد. در آن صورت چه گونه می‌توانست با آن مقابله کند؟

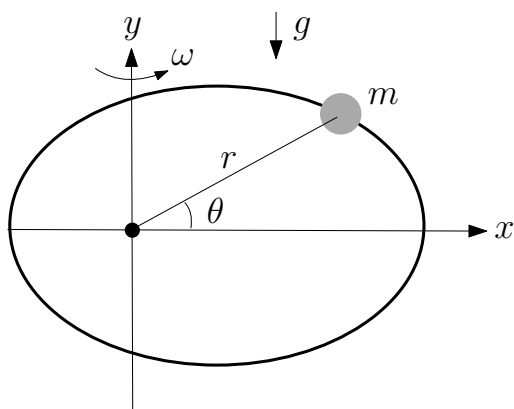


(3) در شکل مقابل پلکانی با زاویه شیب کلی α نسبت به افق نشان داده شده است. شتاب گرانش g و ارتفاع هر پله h است. توپی را با سرعت اولیه v_0 و زاویه پرتاب θ نسبت به افق از نقطه M واقع بر پله AB ، که آن را پله صفرم می‌گیریم، پرتاب می‌کنیم. فاصله نقطه پرتاب M از لبه B را l بگیرد. این توپ روی پله بعدی، پله $A'B'$ ، در نقطه M' فرود می‌آید. فرض می‌کنیم برخورد توپ با سطح

طوری است که مولفه افقی سرعت قبل و بعد از برخورد یکسان است، اما نسبت اندازه مولفه قائم سرعت بعد از برخورد به اندازه مولفه قائم سرعت قبل از برخورد عدد e است که عددی کوچکتر از واحد موسوم به ضریب جهندگی است. این توپ در پله بعدی در نقطه M'' فرود می‌آید و به همین ترتیب همه پله‌ها را یکی یکی طی می‌کند.

الف) مقادیر θ و v_0 را چنان تعیین کنید که $AM = A'M' = A''M'' = \dots$ یعنی حرکت در همه پله‌ها با مشخصات یکسانی تکرار شود. چه شرطی روی l باشد تا در ابتدای کار توپ روی همان پله صفرم فرود نیاید. (در صورت لزوم می‌توانید عبارتهای بزرگ و تکراری را نام دهید و در جواب آخر مقدار آن‌ها را جاگذاری کنید.)

ب) فرض کنید زاویه پرتاب بخش الف را تغییر ندهیم، اما سرعت اولیه v_0 را به مقدار کوچک Δv_0 افزایش دهیم به طوری که $\Delta v_0 / v_0 = \epsilon \ll 1$. فرض کنید توپ تا پله $(n - 1)$ ام به همه پله‌ها برخورد کند، اما پله n ام را رد کند و با آن برخورد نکند. n را تعیین کنید. به ازای $e = 0.75$ ، $l = 0.8AB$ و $\epsilon = 0.06$ را حساب کنید.



4) مفتولی بدون اصطکاک به شکل بیضی در صفحه قائم xy قرار دارد. مبدا مختصات یکی از کانون‌های بیضی است. به این ترتیب معادله بیضی در مختصات قطبی به صورت $r = \frac{r_0}{1 - \epsilon \cos \theta}$ است که r_0 بعد طول دارد و ϵ عددی کوچکتر از یک موسوم به خروج از مرکز است. شتاب گرانش در جهت $-y$ و اندازه آن g است. مهره‌ای به جرم m می‌تواند آزادانه روی مفتول جابه‌جا شود. دستگاه مفتول و مهره حول محور y با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد.

- الف) فرض کنید در حالت تعادل، یعنی حالتی که مهره در امتداد قائم حرکت ندارد، مهره در زاویه قطبی ثابت θ_0 قرار دارد. سرعت زاویه‌ای ω را بر حسب θ_0 و سایر داده‌ها به دست آورید.
- ب) نیروی مفتول روی مهره را بر حسب θ_0 و سایر داده‌ها به دست آورید.
- ج) اگر در یک لحظه معین مهره در زاویه دلخواه θ ، که با θ_0 متفاوت است، قرار داشته باشد و همراه مفتول با سرعت زاویه‌ای معلوم ω بچرخد، شتاب قائم مهره را بر حسب ω ، θ و سایر داده‌ها به دست آورید.

بسمه تعالی

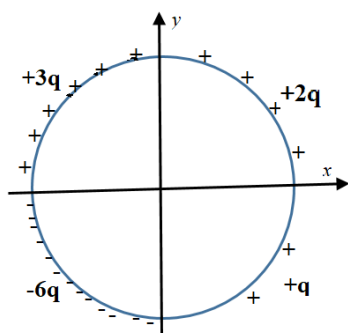
۱۴۰۱/۶/۱۲

آزمون سوم (نهایی) المپیاد فیزیک

مدت آزمون: ۵ ساعت

1) دوقطبی الکتریکی ترکیبی

مطابق شکل، بارهای الکتریکی q ، $2q$ ، $3q$ و $-6q$ را روی یک حلقه دایره‌ای به شعاع R با چگالی طولی یکنواخت در هر ربع حلقه توزیع شده است. برای سهولت دستگاه مختصات را مطابق شکل در نظر بگیرید.



آ) گشتاور دوقطبی الکتریکی حلقه مقابل را می‌توان به صورت $\vec{p}_{2D} = 2RQ\hat{n}$ نوشت. با محاسبه، مقدار Q و بردار $\hat{n}$ را به دست آورید.

ب) پتانسیل الکتریکی حلقه مقابل را در نقطه دلخواه (r, θ, φ) در حالت $r \gg R$ تا جمله $\frac{1}{r^2}$ محاسبه نمایید.

پ) میدان الکتریکی حلقه مقابل را در نقطه دلخواه (r, θ, φ) در حالت $r \gg R$ تا جمله $\frac{1}{r^2}$ محاسبه نمایید.

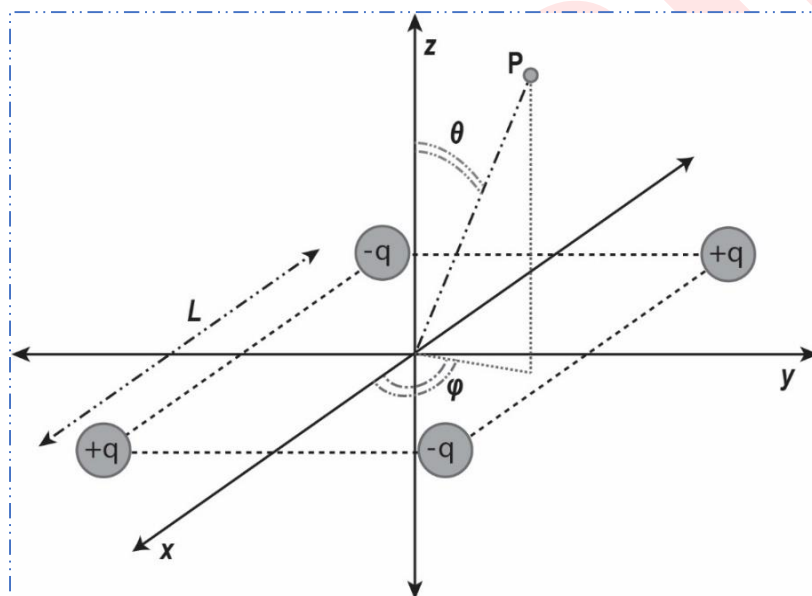
ت) اگر به جای حلقه مورد نظر، یک نیمکره به شعاع R با همان توزیع بارهای الکتریکی در چهار ربع با $z > 0$ در نظر بگیریم در این صورت گشتاور دوقطبی الکتریکی منتجه را می‌توان به صورت $\vec{p}_{3D} = 2RQ'\hat{m}$ نوشت. با محاسبه، مقدار Q' و بردار $\hat{m}$ را به دست آورید.

ث) مقادیر موقعیت زاویه قطبی و زاویه سمتی دوقطبی الکتریکی منتجه قسمت (ت) که به ترتیب با α و β نشان می‌دهیم را تعیین کنید. با استفاده از این اطلاعات، پتانسیل الکتریکی و میدان الکتریکی دوقطبی منتجه را در نقطه دلخواه (r, θ, φ) در حالت $r \gg R$ تا جمله $\frac{1}{r^2}$ محاسبه نمایید.

2) میدان چهارقطبی، خیلی دور، خیلی نزدیک

مطابق با شکل، دو بار $+q$ ، و دو بار $-q$ در چهارگوشه‌ی مربعی به یال L روی صفحه‌ی XY نشسته‌اند؛ در این صورت مجموع کل بارها و نیز بردار دوقطبی الکتریکی حاصل از این آرایش بار، صفر می‌باشند. چنین چیدمانی را، اصطلاحاً، یک چهارقطبی الکتریکی می‌نامیم. هدف اصلی این مسئله یافتن پتانسیل الکتریکی ناشی از چهارقطبی، φ ، در نقطه‌ی دلخواه $P = (x, y, z)$ می‌باشد. ما دو حالت مشخص را در نظر می‌گیریم، وقتی که P بسیار به مبدا مختصات نزدیک باشد (یعنی $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ll L$)؛ و نیز وقتی که بسیار از مبدا دور باشد.

مشخصاً برای نقاط نزدیک به مبدا، می‌توان $\varphi(x, y, z)$ را برحسب x, y, z و بسط سه‌بعدی تیلور داد. بنابه دلایل ریاضی (که در این مسئله قید نمی‌شوند) پتانسیل در این حالت شکل عمومی $\varphi(x, y, z) = f(x)g(y)h(z)$ را خواهد داشت؛ که هر سه تابع به صورت یک بسط تیلور قابل بیان هستند؛ مثلاً: $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + O(x^3)$. هدف سه بخش اول مسئله یافتن ضرایب بسط (مربوط به سه تابع مجهول) تا مرتبه‌ی دوم بسط، و پیدا کردن پتانسیل در نواحی پیرامون مبدا می‌باشد.



چهارقطبی الکتریکی: دو بار q ، و دو بار $-q$ در رئوس مربعی به ضلع L قرار دارند. بارهای هم‌نام روی قطر نشسته‌اند. برای مثال، نزدیک‌ترین بار به دانش‌آموزی که سؤال را می‌خواند (!) یک بار $-q$ است که در نقطه‌ی $(+L/2, +L/2)$ قرار گرفته‌است.

آ - با استفاده از تقارن‌های مسئله، مشخص کنید، اگر هریک از سه مختصه‌ی x, y, z ، و یا z به عکس خود بدل شوند (مثلاً $x \rightarrow -x$)، $\varphi(x, y, z)$ چگونه تغییر خواهد کرد؟ (۳ نمره)

ب - بسط تیلور مربوط به هر کدام از سه متغیر را طوری بیابید، که تقارن یافت‌شده (مربوط به همان متغیر) در بخش ۱ را ارضا کند. (۳ نمره)

حال، با ضرب کردن بسط‌های یافت شده، شکل عمومی پتانسیل برحسب سه مختصه‌ی x, y, z ، نمایان می‌گردد. اما به واسطه‌ی مجهول بودن

ضرایب بسطها، این شکل عمومی هم‌چنان چند مجهول دارد. راه پیدا کردن مجهول‌ها محاسبه‌ی مستقیم پتانسیل در نقطه‌ی دل‌خواه $P = (x, y, z)$ نزدیک به مبدا مختصات می‌باشد.

پ- سعی کنید، با نوشتن صریح پتانسیل ناشی از چهار بار برای نقطه‌ی P در نزدیکی مبدا، ضرایب مجهول را بیابید، و از روی آن پتانسیل را پیدا نمایید. (۳ نمره)

دقت کنید: تنها آن جملاتی که بنابر تقارن باید باقی بمانند، مورد نظر می‌باشند؛ جملات دیگر دست‌آخر حذف می‌شوند و مد نظر طراح سؤال نمی‌باشند.

در گام بعدی سؤال، ابتدا جوابی که یافته‌ایم را به همه‌ی نقاطی که نزدیک به محور z ‌ها هستند، گسترش می‌دهیم (یعنی نقاطی که $L \ll \sqrt{x^2 + y^2}$ ، اما z دل‌خواه می‌باشد). در این حالت، شکل عمومی حاصل ضربی پتانسیل هم‌چنان قابل استفاده خواهد بود؛ اما دیگر نمی‌توانیم از بسط تیلور برای $h(z)$ استفاده کنیم.

ت- با نگارش صریح پتانسیل برای هر نقطه‌ی P که نزدیک به محور z ‌ها باشد، پتانسیل را بیابید. دقت کنید که برای تابعیت $f(x)$ و $g(y)$ هم‌چنان باید از بسط تیلوری که در بخش ب یافتید استفاده کنید، و البته ضرایب بسطها (هرچه باشند) نیاز به محاسبه‌ی مستقیم دارند. (۳ نمره)

ث- دست‌آخر، برای هر نقطه‌ی دل‌خواه P در فاصله‌ی دور از مبدا مختصات (یعنی $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \gg L$) پتانسیل الکتریکی را نوشته، و برحسب توان‌های $1/r$ بسط دهید. هدف این است که اولین جمله‌ی غیر صفر بسط پتانسیل را برای چهار قطبی به دقت، بیابید. (۲ نمره)

ج- پاسخ نهایی بخش ث را در دست‌گاه قطبی بنویسید (۱ نمره)

چند راهنمایی:

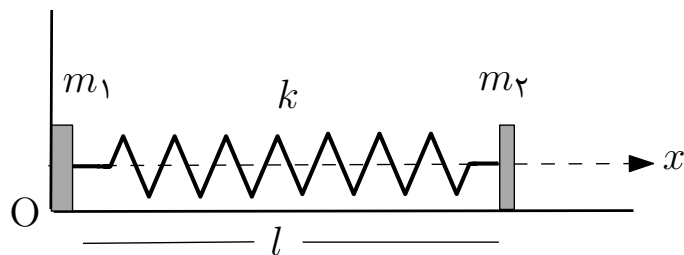
❖ اگر با هوش‌مندی از تقارن‌ها استفاده نشود، حجم محاسبه به‌شدت افزایش می‌یابد، و پیش‌برد مسئله دشوار می‌شود.

❖ بسط دوجمله‌ای برای $1 \ll \varepsilon$ شکل عمومی زیر را دارد:

$$(1 + \varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2!}\varepsilon^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\varepsilon^3 + O(\varepsilon^4)$$

❖ دقت کنید: در بخش‌هایی که محاسبه‌ی صریح پتانسیل را انجام می‌دهید، تنها جملاتی مدنظر می‌باشند، که بنابر ملاحظات تقارنی وجودشان قبلاً تایید شده است. نگه‌داشتن یا نگه‌نداشتن جملاتی که می‌دانید، دست‌آخر حذف خواهند شد، مورد نظر نمی‌باشد.

3) جنگولک خزنده، جنگولک پرنده



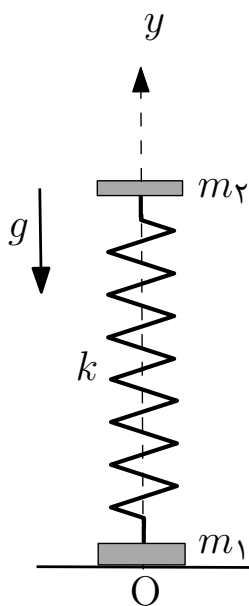
شکل ۱- جنگولک خزنده

دو جسم کوچک به جرم‌های m_1 و m_2 دو سر فنری به ضریب k و طول عادی l بسته شده‌اند. این دستگاه را جنگولک می‌نامیم. در آزمایش نخست، جنگولک در ابتدا مطابق شکل ۱ روی میز افقی بدون اصطکاکی قرار دارد، به طوری که جسم m_1 با دیوار ثابتی، که در نقطه $x = 0$ واقع است، در تماس باشد. سپس جسم m_2 را با دست به اندازه

طول A به سمت چپ حرکت می‌دهیم تا فنر به همین اندازه فشرده شود. دستگاه را در چنین وضعیتی از حال سکون رها می‌کنیم.

(ا) با فرض آن که لحظه $t = 0$ زمانی باشد که جرم m_2 مجدداً از نقطه تعادل فنر رد می‌شود کمیت‌های $x_1(t)$ و $x_2(t)$ مکان دو جسم در لحظه دلخواه t را به دست آورید.

(ب) در یک نمودار بخش متناظر با حرکت مرکز جرم و بخش متناظر با مختصه نسبی در جابه‌جایی $x_1(t)$ را رسم کنید و با تحلیل آن معلوم کنید آیا شرایطی وجود دارد که جسم m_1 پس از جدا شدن از دیوار مجدداً با آن تماس پیدا کند.



شکل ۲- جنگولک پرنده

در آزمایش دوم مطابق شکل ۲ جنگولک را از سمت جسم m_1 در حالت عمودی روی میز قرار می‌دهیم و صبر می‌کنیم تا به حال سکون برسد. سپس مثل حالت قبل، با حرکت دادن جسم m_2 به طرف پایین، فنر را به اندازه طول A فشرده می‌کنیم و دستگاه را از حال سکون رها می‌کنیم. اندازه شتاب گرانش g و جهت آن رو به پایین است. در تمام حرکت جنگولک عمودی باقی می‌ماند.

(پ) با فرض آن که لحظه $t = 0$ زمانی باشد که جرم m_2 مجدداً از محلی که قبل از فشردن دستی فنر در آن قرار داشت رد می‌شود و در لحظه t_1 جسم m_1 از سطح میز بلند می‌شود، کمیت‌های $y_1(t)$ و $y_2(t)$ مکان دو جسم در لحظه دلخواه t را به دست آورید. زمان t_1 را بر حسب داده‌های قبلی به دست آورید و از این پس آن را معلوم فرض کنید.

(ت) فرض کنید $m_2 = 3m_1$ است و جابه‌جایی A نیز ۸ برابر

فشرده‌گی اولیه فنر است. نسبت زمان رسیدن مرکز جرم به نقطه اوج به دوره نوسان حرکت نسبی را به دست آورید. سپس در یک نمودار بخش متناظر با حرکت مرکز جرم و بخش متناظر با مختصه نسبی در جابه‌جایی $y_1(t)$ و در نمودار دیگر همین دو بخش را در کمیت $v_1(t)$ ، سرعت جسم m_1 بعد از کنده شدن از روی میز، را رسم کنید. هر کدام از دو کمیت $y_1(t)$ و $v_1(t)$ از جمع کردن دو بخش یاد شده به دست می‌آیند. به همراه پاسخ‌نامه دو نمودار سینوسی خام به شما داده می‌شود که از آن برای رسم کردن بخش مختصه نسبی و سرعت نسبی استفاده کنید. شما باید لحظه t_1 را در هر نمودار دقیقاً مشخص کنید و نمودار مربوط به حرکت مرکز جرم را به طور مناسب در شکل‌ها اضافه کنید.

ث) روی نمودار $y_1(t)$ لحظات t_1 و t_2 را با علامت ضربدر مشخص کنید که t_2 زمان برخورد مجدد جسم m_1 با سطح میز است. روی نمودار $v_1(t)$ نیز زمان‌هایی را که سرعت لحظه‌ای جسم m_1 صفر می‌شود ضربدر بزنید. محاسبه عددی لازم نیست، اما لازم است تا جایی که دقت چشم اجازه می‌دهد نقاط به طور مناسب انتخاب شده باشند.

4) سوال مقیاسی

در برخی سوال‌ها حتی بدون دانستن دقیق فیزیک مسئله، می‌توان در حالت تغییر چند برابری یک کمیت، تغییر بقیه کمیت‌ها را بدست آورد. در حل آنها، تحلیل ابعادی نقش مهمی ایفا می‌کند.

حتما در جواب این سوال، اول رابطه‌ی (فرمول) کمیت خواسته شده را (بدون «ضریب بدون بعد ثابت تناسب») بدست آورید و سپس با جای‌گذاری، نسبت خواسته شده را به دست آورید. در غیر این صورت نمره‌ای تعلق نمی‌گیرد. همچنین در این سوال به تفاوت چشم‌گیر نمره‌ی قسمت‌های مختلف سوال دقت کنید.

آ) در یک حباب صابون که با صرف نظر از گرانش به صورت کروی است، اختلاف فشار هوای داخل و خارج حباب، ΔP ، تابعی از شعاع کره، R ، می‌باشد. البته معمولا این اختلاف فشار به حدی نیست که باعث تغییر محسوس در چگالی هوا، ρ ، شود. کمیت دیگری که مهم است، ثابت کشش سطحی حباب، γ ، می‌باشد که دارای واحد «نیوتن بر متر» می‌باشد.

اگر شعاع حباب صابون را سه برابر کنیم، اختلاف فشار هوای داخل و خارج حباب، چند برابر خواهد شد؟

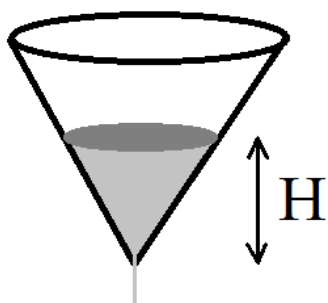
(یک نمره)

ب) وقتی یک موج الکترومغناطیسی مانند نور به یک فلز می‌تابد، تا یک عمق در آن نفوذ می‌کند که به آن «عمق نفوذ»، δ ، می‌گویند. این عمق نفوذ به مقاومت ویژه فلز، ρ ، بسامد موج الکترومغناطیسی، ω ، و ثابت الکترومغناطیسی وابسته است و به شدت موج ربطی ندارد. برای فلزات، می‌توان دید که مجذور عمق نفوذ در بسامد $(\omega\delta^2)$ عددی ثابت است.

اگر مقاومت ویژه فلز پنج برابر شود، عمق نفوذ چند برابر خواهد شد؟

(سه نمره)

پ) اگر در انتهای یک ظرف پر از یک مایع، سوراخ کوچکی به قطر D ایجاد کنیم به طوری که مایع به آرامی از ظرف تخلیه شود، شار خروجی مایع، با اختلاف فشار دو طرف سوراخ متناسب است. (شار یا دبی، مقدار حجم مایع خارج شده بر واحد زمان است (دارای کمیت حجم بر واحد زمان است)). کمیت دیگری که در اینجا مهم



است، «گرانروی»، η ، نام دارد. (مثلاً گرانروی عسل بیشتر از آب است). واحد کمیت گرانروی در سیستم بین‌المللی واحدها، برابر پاسکال ثانیه (نیوتن ضرب در ثانیه تقسیم بر متر مربع) است. شار خروجی مایع با گرانروی رابطه‌ی معکوس دارد (یعنی شار با η^{-1} متناسب است). در طول این مسئله از ضخامت ظرف صرف نظر کنید.

یک قیف مخروطی را تا ارتفاع H از یک مایع با چگالی ρ پر کرده‌ایم. در نوک مخروط، سوراخ کوچکی به قطر D ایجاد کرده‌ایم. در این حالت زمان تخلیه‌ی کل مایع از ظرف برابر τ است. در اینجا می‌توان از چگالی هوا صرف نظر کرد.

حال اگر ارتفاع اولیه‌ی مایع را عوض نکنیم ($\frac{H'}{H} = 1$) و قطر سوراخ را دو برابر کنیم ($\frac{D'}{D} = 2$)، زمان تخلیه‌ی کل مایع چند برابر خواهد شد؟ ($\frac{\tau'}{\tau} = ?$)

(شش نمره)

IranPhO.ir

5) برای یک دستگاه هیدروستاتیکی انرژی داخلی U به عنوان تابعی از حجم V و آنترופی S به صورت

$$U(S, V) = U_0 \left(\frac{S}{S_0} \right)^2 \left(\frac{V_0}{V} \right)$$

داده شده است که در آن U_0 ، S_0 و V_0 ثابت اند.

(آ) آنترופی دستگاه را بر حسب دما و حجم به دست آورید.

(ب) معادله حالت دستگاه (رابطه بین فشار، دما و حجم) را به دست آورید.

(پ) انرژی داخلی دستگاه را بر حسب فشار و حجم به دست آورید.

(ت) ظرفیت گرمایی دستگاه در حجم ثابت و در فشار ثابت را به دست آورید.

(ث) در یک تحول بی دررو برگشت پذیر علاوه بر معادله حالت چه قیدی بین پارامترهای فشار، حجم و دمای دستگاه برقرار است؟

(ج) بازده چرخه برگشت پذیری متشکل از چهار فرآیند زیر را به دست آورید.

- تحول هم دما از حالت تعادل $A(V_1, T_1)$ به حالت تعادل $B(V_2, T_1)$.
- تحول هم حجم از حالت تعادل $B(V_2, T_1)$ به حالت تعادل $C(V_2, T_2)$.
- تحول هم دما از حالت تعادل $C(V_2, T_2)$ به حالت تعادل $D(V_1, T_2)$.
- تحول هم حجم از حالت تعادل $D(V_1, T_2)$ به حالت تعادل $A(V_1, T_1)$.

(چ) کار و گرمای مبادله شده در هر یک از فرآیندهای برگشت پذیر زیر را به دست آورید و سپس بازده چرخه را محاسبه کنید.

- تحول هم دما از حالت تعادل $A(V_1, T_1)$ به حالت تعادل $B(V_2, T_1)$.
- تحول بی دررو از حالت تعادل $B(V_2, T_1)$ به حالت تعادل $C(V_3, T_2)$.
- تحول هم دما از حالت تعادل $C(V_3, T_2)$ به حالت تعادل $D(V_4, T_2)$.
- تحول بی دررو از حالت تعادل $D(V_4, T_2)$ به حالت تعادل $A(V_1, T_1)$.

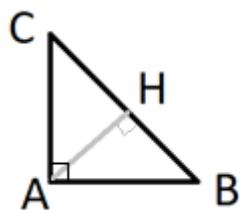
(1) پتانسیل بدون انتگرال

مسائلی وجود دارند که شاید در نگاه اول، مسیر حل آنها گرفتن انتگرال‌های پیچیده یا غیر تحلیلی باشد، ولی با اندکی هوشمندی می‌توان به برخی از آنها بدون گرفتن انتگرال پاسخ گفت. مثلاً در این سوال برای چند مسئله، نسبت پتانسیل‌های الکتریکی چند نقطه، پرسیده شده است که می‌توان بدون گرفتن هیچ انتگرالی به آنها پاسخ گفت. پس حتماً بدون گرفتن هیچ انتگرالی به سوال‌های زیر پاسخ دهید.

الف) برای یک مکعب باردار با چگالی بار حجمی یکنواخت، نسبت پتانسیل مرکز مکعب، نقطه‌ی O ، را به پتانسیل یکی از راس‌های مکعب، نقطه‌ی A ، بدست آورید؟ $(\frac{\varphi_O}{\varphi_A} = ?)$

(۲ نمره)

بقیه‌ی مسائل در این سوال دو بعدی هستند.

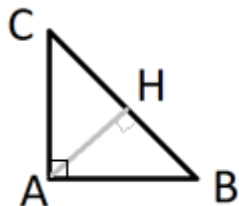


ب) یک مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه مطابق شکل (راس A قائمه است و دو راس B و C زاویه‌ی 45° دارند). دارای چگالی بار سطحی یکنواخت است. ما این مثلث را از وسط (خط $\overline{AH}$) کاملاً تا می‌زنیم تا نقطه‌ی C بر نقطه‌ی B منطبق شود و این نقطه را B' می‌نامیم. (مثلث ABC به مثلث کوچک‌تر HAB' تبدیل می‌شود). پتانسیل

نقطه‌ی B در حالت جدید (B') نسبت به پتانسیل نقطه‌ی B در حالت اولیه چقدر است؟ $(\frac{\varphi_{B'}}{\varphi_B} = ?)$ (۱ نمره)

پتانسیل نقطه‌ی A در حالت جدید نسبت به پتانسیل نقطه‌ی A در حالت اولیه چقدر است؟ $(\frac{\varphi_{A'}}{\varphi_A} = ?)$ (۱ نمره)

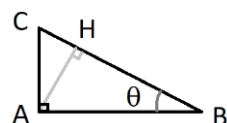
(مجموعاً ۲ نمره)



پ) یک مثلث متساوی الساقین قائم الزاویه مطابق شکل (راس A قائمه است و دو راس B و C زاویه 45° دارند). دارای چگالی بار سطحی یکنواخت است. خط $\overline{AH}$ ارتفاع است. نسبت پتانسیل نقطه‌ی H و B به نقطه‌ی A چقدر است؟ $(\frac{\varphi_H}{\varphi_A} = ?)$ (۱ نمره)

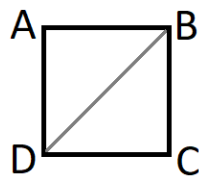
$$(\frac{\varphi_B}{\varphi_A} = ?) \text{ (۱ نمره)}$$

(مجموعاً ۲ نمره)



ت) یک مثلث قائم الزاویه مطابق شکل (راس A قائمه است و راس B دارای زاویه‌ی θ است). دارای چگالی بار سطحی یکنواخت است. خط $\overline{AH}$ ارتفاع است. نسبت پتانسیل نقطه‌ی H به پتانسیل نقطه‌ی A چقدر است؟ $(\frac{\varphi_H}{\varphi_A} = ?)$ (۲ نمره)

(۲ نمره)

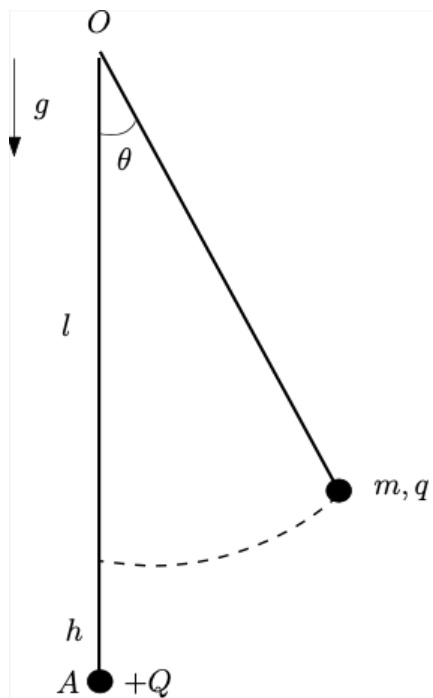


ث) یک مربع مطابق شکل دارای چگالی بار سطحی یکنواخت است. اگر این مربع را از قطر $\overline{BD}$ کاملاً تا بزنیم، به یک مثلث تبدیل می‌شد. نسبت پتانسیل نقطه‌ی A در حالت جدید (راس قائمه مثلث که پتانسیل آن را با φ'_A نشان می‌دهیم) به پتانسیل نقطه‌ی A در حالت اولیه (راس مربع که پتانسیل آن را با φ_A نشان می‌دهیم) چقدر است؟ $(\frac{\varphi'_A}{\varphi_A} = ?)$ (۱ نمره)

پتانسیل نقطه‌ی B در حالت جدید (راس مثلث که پتانسیل آن را با φ'_B نشان می‌دهیم) به پتانسیل نقطه‌ی B در حالت اولیه (راس مربع که پتانسیل آن را با φ_B نشان می‌دهیم) چقدر است؟ $(\frac{\varphi'_B}{\varphi_B} = ?)$ (۱ نمره)

(مجموعاً ۲ نمره)

(2) آونگ الکتریکی



گلوله آونگ ساده‌ای به جرم m دارای بار q است. طول نخ آونگ l است. اندازه شتاب گرانش g و سوی آن رو به پایین است. زاویه امتداد نخ آونگ با راستای قائم را θ می‌نامیم. مطابق شکل در نقطه A به فاصله h زیر نقطه تعادل معمولی آونگ یک بار نقطه‌ای قرار می‌دهیم. (شکل حالت ب را نشان می‌دهد.)

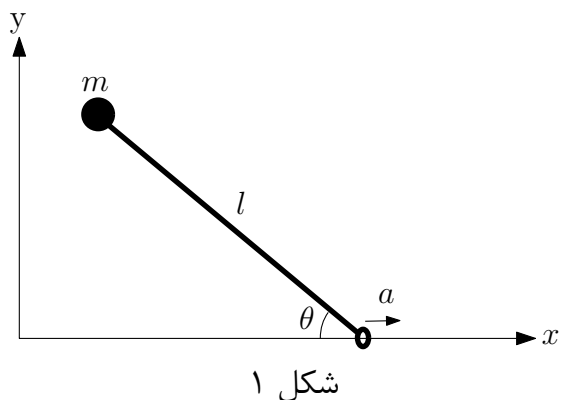
(آ) برای حالتی که در نقطه A بار $-Q$ قرار گرفته است، حالت‌های تعادل دستگاه را بررسی کنید و بسامد نوسان‌های کوچک در صفحه قائم حول حالت تعادل پایدار را حساب کنید.

(ب) حال اگر در نقطه A بار $+Q$ قرار دهیم به ازای h معین، کمینه و بیشینه Q چقدر باشد تا راستای تعادل پایدار آونگ راستایی به غیر از امتداد قائم باشد. بسامد نوسان‌های کوچک در صفحه قائم حول حالت تعادل پایدار را برای وقتی که Q از مقدار کمینه کمتر و نیز وقتی که Q از مقدار بیشینه بیشتر است حساب کنید.

(پ) باز هم وضعیت بخش ب را در نظر بگیرید که در آن بار واقع در نقطه A مثبت است. این بار فرض کنید دستگاه به شکل یک آونگ مخروطی عمل می‌کند، یعنی گلوله آونگ در صفحه‌ای افقی با سرعت زاویه ثابت و معین ω حول محور قائم Z روی یک دایره می‌چرخد. اگر زاویه نخ با امتداد قائم θ_1 باشد، نسبت اندازه نیروی الکتریکی بین بارها در وضعیت فوق به نیروی وزن گلوله را بر حسب θ_1 و سایر داده‌ها حساب کنید.

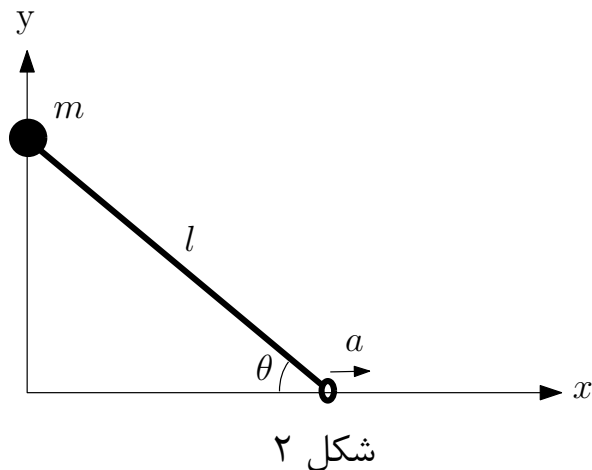
(3) جرم و نخ

توجه: در این مسئله چیدمان سه بخش A، B و C تفاوت دارند. دقت کنید که بخشی از داده‌ها مشابه و بخشی متفاوت هستند.



A - جرم کوچک m به یک سر نخ به طول l بسته شده و آزادانه در صفحه افقی بدون اصطکاک xy حرکت می‌کند. سر دیگر نخ به حلقه بدون جرمی متصل است که بر روی میله بینهایت طولی که بر محور x منطبق است با شتاب ثابت a به سمت راست کشیده می‌شود. در شروع حرکت، نخ و جرم m روی محور y ساکن هستند. مختصه θ را مطابق شکل ۱ بین نخ و جهت منفی محور x می‌گیریم.

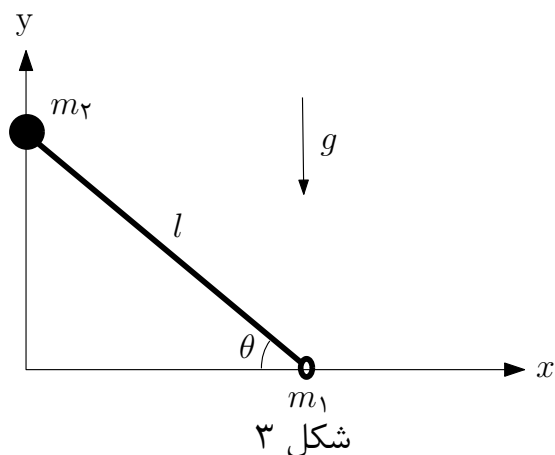
- (آ) کمیت‌های $\dot{\theta}$ و $\ddot{\theta}$ را بر حسب زاویه θ و سایر کمیت‌های داده شده به دست آورید.
 (ب) زمان رسیدن جرم m به محور x را به صورت یک انتگرال معین به دست آورید.
 (پ) بازه تغییرات متغیر θ و نوع حرکت آن را معین کنید.
 (ت) نیروی کشش نخ را بر حسب زاویه θ و سایر کمیت‌های داده شده به دست آورید.



B - حال همان دستگاه شکل ۱ را در نظر بگیرید که این بار جرم m مقید است که بر روی محور y جابه‌جا شود. مثلاً می‌توانید فرض کنید مطابق شکل ۲ جرم m مهره کوچکی است که بر روی مفتول بدون اصطکاک که بر محور y منطبق است حرکت می‌کند. شرایط اولیه نیز مشابه قبل است.

- (ث) زاویه θ را به صورت تابعی از زمان به دست آورید.
 (ج) نیروی کشش نخ را به صورت تابعی از زمان به دست آورید.

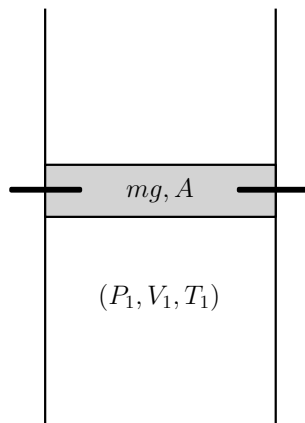
C - فرض کنید مشابه چیدمان قسمت B دو مفتول بدون اصطکاک بر روی محورهای x و y قرار داشته باشند. صفحه xy در این بخش صفحه‌ای عمودی است و شتاب گرانش g مشابه شکل ۳ در جهت $-y$ باشد.



است. جرم‌های m_1 و m_2 به ترتیب مقید به حرکت بر روی محوره‌های x و y هستند. بین این دو جسم میله بسیار سبکی به طول ثابت l متصل است. در شروع حرکت جرم m_2 در نقطه $y = h$ قرار دارد و دستگاه از حال سکون رها می‌شود.

(چ) نیروهای N_1 و N_2 را که میله‌ها به ترتیب به جرم‌های m_1 و m_2 وارد می‌کنند بر حسب زاویه θ و سایر کمیت‌های داده شده به دست آورید. جواب را می‌توانید بر حسب توابع تعریف شده‌ای از θ نیز بیان کنید.

4) دو قسمت a) و b) از هم مستقل اند.



a) n مول گاز ایده آل داخل استوانه ای مطابق شکل به وسیله پیستونی به وزن mg و مساحت A محصور شده و پیستون توسط مانعی نگه داشته شده است. در ابتدا گاز در حالت تعادل (P_1, V_1, T_1) است. فرض کنید خارج از استوانه خلاء و $P_1 A \neq mg$ است. مانع را برمی داریم تا گاز منبسط یا متراکم شود و پیستون در وضعیت سکون نهایی که گاز در حالت تعادل و فشار گاز داخل استوانه برابر mg/A است، قرار گیرد. شرایط طوری تنظیم شده است که منبعی در حین تحول، دمای گاز را همواره برابر مقدار اولیه T_1 ثابت نگه می دارد. پیستون با استوانه اصطکاک ندارد.

آ) فرض کنید فرآیند برگشت پذیر است. کار انجام شده به وسیله گاز، W_{rev} ، تغییر آنتروپی گاز، تغییر آنتروپی محیط و تغییر آنتروپی جهان، $\Delta S_{rev}^{universe}$ ، را به دست آورید.

ب) فرض کنید فرآیند برگشت ناپذیر است. کار انجام شده به وسیله گاز، W_{irrev} ، تغییر آنتروپی گاز، تغییر آنتروپی محیط و تغییر آنتروپی جهان، $\Delta S_{irrev}^{universe}$ ، را به دست آورید.

پ) نمودار $\Delta W = W_{irrev} - W_{rev}$ را بر حسب mg/AP_1 رسم کنید.

ت) نمودار $\Delta S_{irrev}^{universe} - \Delta S_{rev}^{universe}$ را بر حسب mg/AP_1 رسم کنید.

b) در گازهای بیش از تک اتمی بعضی از مولکول ها به اتم ها تجزیه می شوند و تعداد اتم های تجزیه شده با افزایش دما، افزایش می یابد. یک گاز ایده آل دو اتمی در ظرفی به حجم V در دمای T در نظر بگیرید. درجه تجزیه یک گاز دو اتمی با δ و به صورت جرم بخش تک اتمی به جرم کل (مجموع جرم های بخش تک اتمی و دو اتمی) تعریف می شود.

آ) فشار کل مخلوط گاز دو اتمی و تک اتمی را بر حسب δ ، m جرم کل، M_2 جرم مولی بخش دو اتمی و سایر پارامترهای داده شده به دست آورید. ثابت گازها R است.

ب) برای بخارید در هریک از دماهای داده شده در جدول زیر δ را به دست آورید.

$T(^{\circ}\text{C})$	800	1000	1200
$\frac{PV}{m} \text{ (J/kg)}$	3.72×10^4	5.08×10^4	7.30×10^4

P فشار کل مخلوط است. جرم مولی ملکولهای دو اتمی $M_{I_2} = 254 \text{ g/mol}$ و ثابت گازها $R = 8.31 \text{ J/mol.K}$ است.

پ) در هریک از دماهای داده شده در جدول فوق $\gamma = c_p/c_V$ را به دست آورید. برای گاز ایده آل تک اتمی $\gamma_1 = 5/3$ و برای گاز ایده آل دو اتمی $\gamma_2 = 7/5$ است.

(5) دو قسمت (a) و (b) از هم مستقل اند.

(a) یک منبع (با ظرفیت گرمایی نامتناهی) به دمای T_0 و دو جسم یکسان هر یک به جرم m و گرمای ویژه c و دماهای اولیه T_1 و T_2 ($T_1 > T_0, T_2 > T_0$) در نظر بگیرید. یک ماشین کارنو داریم که می توان زمان یک چرخه آن را برای گرفتن (یا دادن) مقدار مشخصی گرما از جسم گرم (به جسم سرد) تنظیم کرد.

(آ) بیشینه کار قابل حصول از این مجموعه به وسیله ماشین کارنو را به دست آورید.

(ب) بازده این ماشین را در مجموعه فرآیندهایی که منجر به حصول بیشینه کار می شود به دست آورید.

(پ) تغییر آنتروپی دو جسم و نیز تغییر آنتروپی منبع در مجموعه فرآیندهای فوق چقدر است؟

(b) سه ظرف که حجم هر یک از آنها همواره ثابت است محتوی n_1, n_2 و n_3 مول گاز ایده آل تک اتمی در نظر بگیرید. دمای گازها به ترتیب T_1, T_2 و T_3 است. می خواهیم دمای یکی از گازها را با گرفتن گرما از دو گاز دیگر و دادن آن به گازی که می خواهیم دمای آن را بالا ببریم تا جایی که امکان دارد افزایش دهیم. گرمای ویژه مولی گاز ایده آل تک اتمی در حجم ثابت $c_V = 3R/2$ است.

(آ) بیشترین دمای ممکن از چه معادله ای به دست می آید؟

(ب) به ازای $n_1 = n_2 = n_3$ و $T_1 = 300\text{ K}$ و $T_2 = 400\text{ K}$ و $T_3 = 500\text{ K}$ مقدار عددی دمای بیشینه را تا دو رقم معنی دار به دست آورید.

(پ) دمای دو گاز دیگر چقدر است؟