①

به نام خدا

پاسخ سؤالات مرحله دوم المپیاد فیزیک - دوره ۳۳ - شیوه ۵ ۱۳۹۹

۱) آ) با توجه به اینکه در $t=0$ از مبدا عبور کرده و سرعت آن مثبت می باشد داریم:

$$x(t) = A_0 \sin \omega t \quad , \quad v(t) = A_0 \omega \cos \omega t$$

ب) با توجه به توضیحات سؤال $P(t) = fv$ از طرفی با توجه به اینکه معادلات حرکت تغییری نمی کنند

داریم $x(t) = A \sin \omega t$ ، $v(t) = A\omega \cos \omega t$ یعنی اثر نیروی مقاومت تنها دامنه را تغییر می دهد

توان لحظه ای $\quad P = fv = -bv^2 = -bA^2\omega^2\cos^2\omega t$

$$= -bA^2\omega^2\left(\frac{1+\cos 2\omega t}{2}\right)$$

توان متوسط $\quad \overline{P} = -\overline{\frac{1}{2}bA^2\omega^2(1+\cos 2\omega t)} = -\overline{\frac{1}{2}bA^2\omega^2} - \overline{\frac{1}{2}bA^2\omega^2\cos 2\omega t}$

جمله دوم با توجه به وجود جمله $\overline{\cos 2\omega t}$ صفر است.

$$\Rightarrow \overline{P} = -\frac{1}{2}bA^2\omega^2$$

پ) انرژی کل نوسانگر بدون نیروی مقاومت به صورت $E = \frac{1}{2}KA_0^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A_0^2$

می باشد، با توجه به توضیحات و اینکه تنها دامنه تغییر می کند داریم: $E(\tau) = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$

$$\overline{P} = -\frac{1}{2}b\omega^2A^2 = -\frac{b}{m}\left(\frac{1}{2}m\omega^2A^2\right) = -\frac{b}{m}E$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{d\tau} = -\frac{b}{m}E(\tau)$$

با توجه به توضیحات تابع نمایی E باید به صورت $E = Ce^{-\frac{b}{m}\tau}$ باشد که در $\tau = 0$ ، $C = E_0$

به دست می آید.

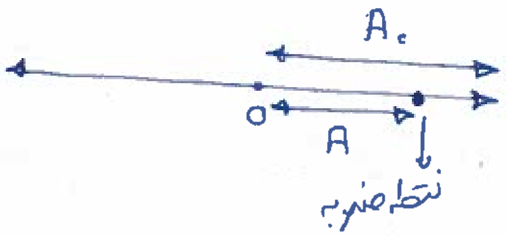
$$\Rightarrow E = E_0 e^{-\frac{b}{m}\tau}$$

ب) با جاگذاری $E=\frac{1}{2}m\omega^2A^2$, $E_0=\frac{1}{2}m\omega^2A_0^2$ داریم:

$$\frac{1}{2}m\omega^2A^2=\left(\frac{1}{2}m\omega^2A_0^2\right)e^{-b/m\,\tau}$$

$$\Rightarrow\quad A=A_0\,e^{-\frac{b}{2m}\tau}$$

پ) می‌دانیم $F=\frac{\Delta P}{\Delta t}$ که P تکانه جسم است:



با توجه به شکل زیر در نقطه‌ای که ضربه وارد می‌شود
باید سرعت نوسانگر از صفر به سرعت متناظر با نوسانگر
بدون مقاومت در نقطه $x=A$ برسد پس داریم:

برای نوسانگر $v=\pm\omega\sqrt{A^2-x^2}$ $\Rightarrow$ بعد از ضربه $v=\omega\sqrt{A_0^2-A^2}$

$$\Rightarrow\quad v=\omega\sqrt{A_0^2-A_0^2e^{-b/m\,\tau}}=\omega A_0\sqrt{1-e^{-b/m\,\tau}}$$

قبل از ضربه $v=0$ $\Rightarrow$ $F=\frac{\Delta P}{\Delta t}=\frac{m\left(\omega A_0\sqrt{1-e^{-b/m\,\tau}}-0\right)}{\delta t}$

ج)

$$A=\frac{1}{2}A_0\ \Rightarrow\ A_0e^{-\frac{b}{2m}\tau}=\frac{1}{2}A_0\ \Rightarrow\ e^{-\frac{b}{2m}\tau}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\quad -\frac{b}{2m}\tau=\mathrm{Ln}\left(\frac{1}{2}\right)=-\mathrm{Ln}\,2\ \Rightarrow\ \tau=\frac{2m}{b}\mathrm{Ln}\,2$$

$$\Rightarrow\quad \tau=\frac{2\times10^{-1}\times0.69}{10^{-3}}=1.38\times10^{2}\,s\simeq1.4\times10^{2}\,s$$

زمان تناوب $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\times3.14}{10^2}=6.28\times10^{-2}s\simeq6.3\times10^{-2}s$

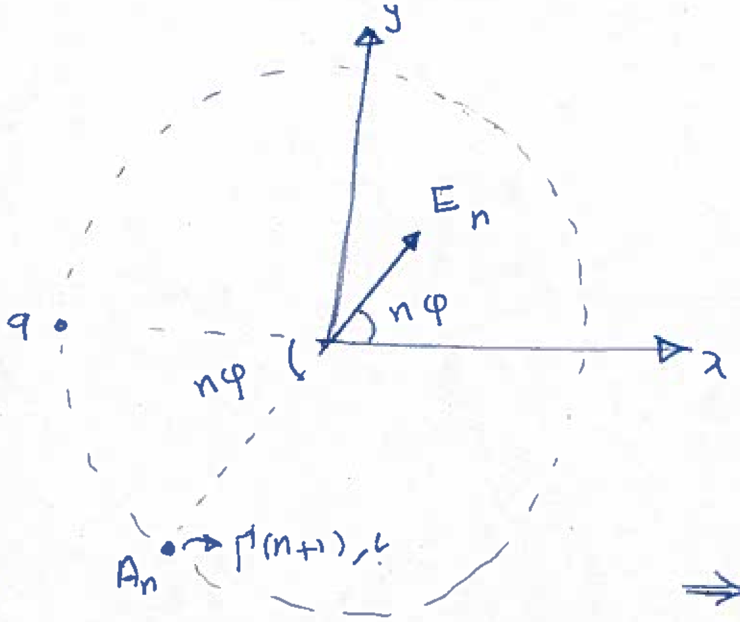
$$\Rightarrow\quad \frac{\tau}{T}=\frac{1.4\times10^{2}}{6.3\times10^{-2}}\simeq2.2\times10^{3}$$

$$\bar{F}=\frac{m\omega_0A}{\delta t}\sqrt{1-e^{-\frac{b}{m}\tau}}=\frac{10^{-1}\times10^{2}\times5\times10^{-2}}{2\times10^{-4}}\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}\times10^{3}N$$

$$\simeq\frac{5\times1.7}{2}\times10^{3}=\frac{8.5}{2}\times10^{3}$$

پاسخ سؤالات مرحله دوم المپیاد فیزیک - دوره ۳۳ - تیرماه ۱۳۹۹

۲)



$$\text{آ)}\quad \vec{E}_n = |\vec{E}_n| \left(\cos n\varphi\, \hat{i} + \sin n\varphi\, \hat{j}\right)$$

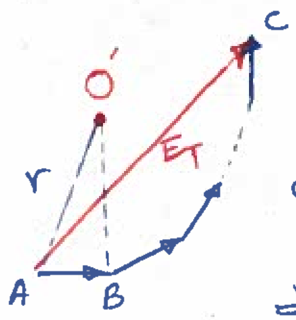
$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \left(\cos n\varphi\, \hat{i} + \sin n\varphi\, \hat{j}\right)$$

$$\vec{E}_T = \sum_{n=0}^{N} \vec{E}_n$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sum_{n=0}^{N} \left(\cos(n\varphi)\, \hat{i} + \sin(n\varphi)\, \hat{j}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_{Tx} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \cos(n\varphi) \\ E_{Ty} = \dfrac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \sin(n\varphi) \end{cases}$$

ب) می‌دانیم که اندازه میدان هر بار در مبدأ مختصات یکسان است و تنها جهت میدان‌ها با یکدیگر متفاوت است به این صورت که میدان هر بار نسبت به میدان بار قبلی به اندازه φ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت چرخیده است.



با توجه به شکل این بردارها همگی وترهای یک دایره به شعاع r می‌باشند که O' مرکز عمودمنصف هر E_n می‌باشد

$$O'AB \text{ در مثلث } \Rightarrow \frac{|AB|}{2} = r\sin\frac{\hat{AO'B}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{|E_n|}{2} = r\sin\frac{\varphi}{2} \Rightarrow \boxed{r = \frac{Kq}{2R^2} \cdot \frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}}}$$

$$\hat{AO'C} = (N+1)\varphi \rightarrow AO'C \text{ در مثلث } \Rightarrow \frac{|E_T|}{2} = r\sin\left(\frac{\hat{AO'C}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow |E_T| = \frac{Kq}{R^2} \frac{\sin\left(\left(\frac{N+1}{2}\right)\varphi\right)}{\sin\varphi/2} \qquad K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\text{زاویه } E_T \text{ با محور } x\text{ها} = \hat{CAB} = \hat{O'AB} - \hat{O'AC} = \left(\frac{\pi-\varphi}{2}\right) - \left(\frac{\pi-(N+1)\varphi}{2}\right) = \frac{N\varphi}{2}$$

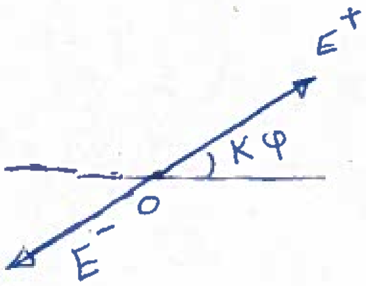
$$\Rightarrow \vec{E}_T = \frac{Kq}{R^2} \frac{\sin\left(\left(\frac{N+1}{2}\right)\varphi\right)}{\sin\varphi/2} \left(\cos\frac{N\varphi}{2}\,\hat{i} + \sin\frac{N\varphi}{2}\,\hat{j}\right)$$

ب) $N=2K$ در این حالت، تعداد $K+1$ بار مثبت و K بار منفی داریم. در بارهای هم نام با هم زاویه 2φ می‌سازند میدان هر دسته از بارها طبق قسمت الف به صورت زیر است:

$$|\vec{E}_+| = \frac{Kq}{R^2}\,\frac{\sin (K+1)\frac{2\varphi}{2}}{\sin \frac{2\varphi}{2}} \qquad \text{زاویه با محور x ها} = K\,\frac{2\varphi}{2} = K\varphi$$

$$|\vec{E}_-| = \frac{Kq}{R^2}\,\frac{\sin K\,{2\varphi}/{2}}{\sin \frac{2\varphi}{2}} \qquad \text{زاویه با محور x ها} = (K-1)\frac{2\varphi}{2} = (K-1)\varphi$$

اما باید توجه داشت که بارهای منفی از زاویه φ شروع شده‌اند لذا زاویه بالا برای حالتی است که از زاویه صفر (از A_0) شروع شده باشند. پس این زاویه با محور x ها برای بارهای منفی هم $(K-1)\varphi+\varphi$ می‌باشد یعنی میدانها در یک راستا قرار دارند.



$$\Rightarrow |E_T| = E^+ - E^- = \frac{Kq}{R^2}\left(\frac{\sin (K+1)\varphi - \sin K\varphi}{\sin\varphi}\right)$$

$$= \frac{Kq}{R^2}\left(\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{2K+1}{2}\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}\right)$$

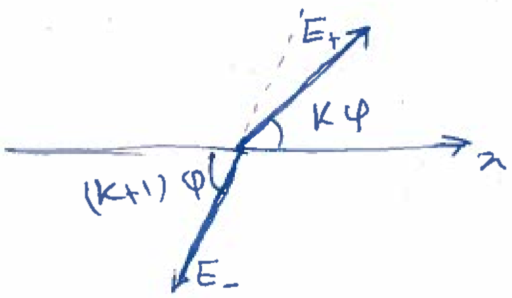
$$= \frac{Kq}{R^2}\left(\frac{\cos\frac{N+1}{2}\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}}\right) \qquad \text{زاویه } E_T \text{ با محور x ها} = K\varphi = \frac{N}{2}\varphi$$

$$\Rightarrow \vec{E}_T = \frac{Kq}{R^2}\,\frac{\cos\frac{N+1}{2}\varphi}{\cos\frac{\varphi}{2}}\left(\cos\frac{N}{2}\varphi\,\hat{i} + \sin\frac{N}{2}\varphi\,\hat{j}\right)$$

ج) $N=2K+1$ در این حالت $K+1$ بار مثبت و $K+1$ بار منفی داریم. در بارهای هم نام با هم زاویه 2φ می‌سازند. با توجه به نکته گفته شده در مورد زاویه بارهای منفی در قسمت ب داریم:

$$|E_+| = \frac{Kq}{R^2}\,\frac{\sin (K+1)\frac{2\varphi}{2}}{\sin\frac{2\varphi}{2}} \qquad \text{زاویه با محور x ها} = \beta_+ = K\,\frac{2\varphi}{2} = K\varphi$$

$$|E_-| = \frac{Kq}{R^2}\,\frac{\sin (K+1)\frac{2\varphi}{2}}{\sin\frac{2\varphi}{2}} \qquad \text{زاویه با محور x ها} = \beta_- = K\,\frac{2\varphi}{2} + \varphi = (K+1)\varphi$$



$$\Rightarrow \quad E_{Tx} = E_+ \cos K\varphi - E_- \cos (K+1)\varphi$$

$$= \frac{Kq}{R^2} \frac{\sin (K+1)\varphi}{\sin \varphi} \left(\cos K\varphi - \cos (K+1)\varphi \right)$$

$$= \frac{Kq}{R^2} \frac{\sin (K+1)\varphi}{2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}} \left(-2 \sin \frac{2K+1}{2}\varphi \, \sin \left(-\frac{\varphi}{2}\right) \right)$$

$$= \frac{Kq}{R^2} \frac{\sin (K+1)\varphi}{\cos \frac{\varphi}{2}} \sin \frac{2K+1}{2}\varphi = \frac{Kq}{R^2} \frac{\sin \left(\frac{N+1}{2}\right)\varphi}{\cos \frac{\varphi}{2}} \sin \frac{N}{2}\varphi$$

$$E_{Ty} = E_+ \sin K\varphi - E_- \sin (K+1)\varphi$$

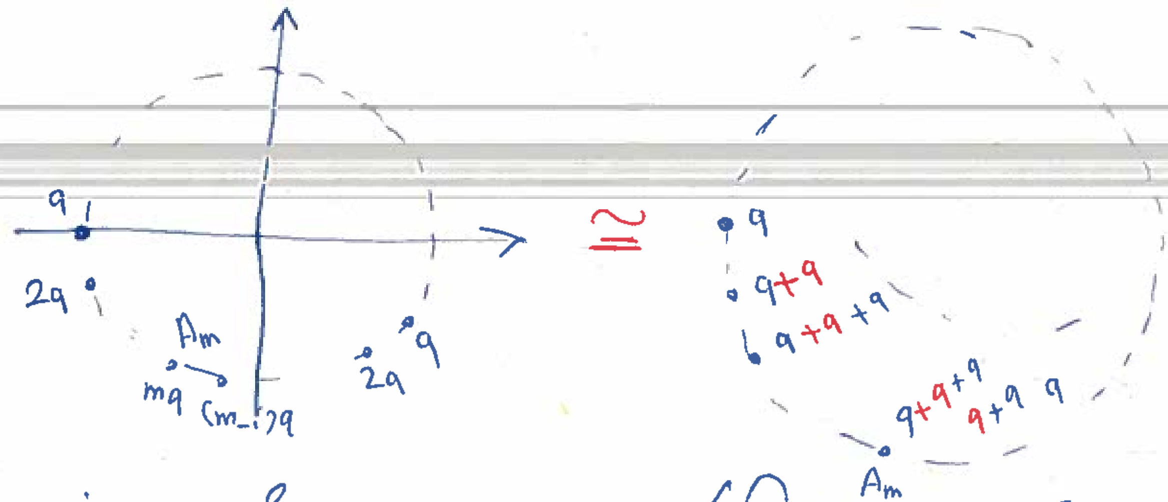
$$= \frac{Kq}{R^2} \frac{\sin (K+1)\varphi}{\sin \varphi} \left(\sin K\varphi - \sin (K+1)\varphi \right)$$

$$= \frac{Kq}{R^2} \frac{\sin (K+1)\varphi}{2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}} \left(2 \sin \left(-\frac{\varphi}{2}\right) \cos \frac{2K+1}{2}\varphi \right)$$

$$= -\frac{Kq}{R^2} \frac{\sin \left(\frac{N+1}{2}\right)\varphi}{\cos \frac{\varphi}{2}} \cos \frac{N}{2}\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}_T = \frac{Kq}{R^2} \frac{\sin \left(\frac{N+1}{2}\right)\varphi}{\cos \frac{\varphi}{2}} \left(\sin \frac{N}{2}\varphi \, \hat{i} - \cos \frac{N}{2}\varphi \, \hat{j} \right)$$

ث) در این حالت آرایش بارها را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت.



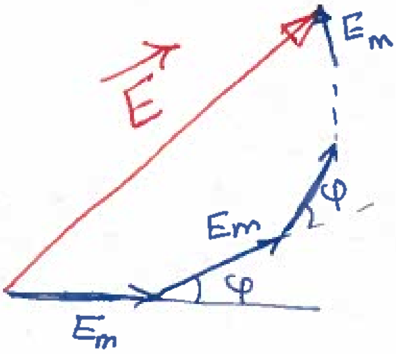
این آرایش از m حالت قسمت الف به دست می‌آید که هر حالت دارای m بار q می‌باشد و هر حالت نسبت به حالت قبلی به اندازه φ چرخیده است.

ادامهٔ سؤال ۴.

میدان الکتریکی هر آرایش P با m بار q برابر است با

$$\vec{E}_m = \frac{Kq}{R^2}\,\frac{\sin\frac{m}{2}\varphi}{\sin\varphi/2}\left[\cos\left(\frac{m-1}{2}\right)\varphi\,\hat{i} + \sin\left(\frac{m-1}{2}\right)\varphi\,\hat{j}\right]$$

میدان کل برابر است با m بردار $\vec{E}_m$ که هر کدام نسبت به قبلی به اندازه φ چرخیده است.



$$|E_m| = \frac{Kq}{R^2}\,\frac{\sin\frac{m}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

طبق روابط قسمت (ب) $\Rightarrow$

$$r = \frac{|E_m|}{2\sin\frac{\varphi}{2}} = \frac{Kq}{2R^2}\,\frac{\sin\frac{m}{2}\varphi}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}$$

$$|\vec{E}| = 2r\sin\frac{m\varphi}{2}$$

زاویه با محور xها $= (m-1)\frac{\varphi}{2}$

$$\Rightarrow |\vec{E}| = \frac{Kq}{R^2}\,\frac{\sin^2\frac{m\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{Kq}{R^2}\,\frac{\sin^2\frac{m\varphi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}\left(\cos(m-1)\frac{\varphi}{2}\,\hat{i} + \sin(m-1)\frac{\varphi}{2}\,\hat{j}\right)$$

پاسخ سؤالات مرحله دوم المپیاد فیزیک - دوره ۳۳ - تیرماه ۱۳۹۹

سؤال ۳:

الف) با توجه به تعریف ثابت واپاشی احتمال واپاشی یک اتم در مدت زمان Δt برابر است با $\lambda \Delta t$

از طرف دیگر هر کدام از N اتم می‌توانند با چنین احتمالی واپاشیده شوند بنابراین داریم

$$\text{احتمال واپاشی کل} = \lambda \Delta t = -\frac{\Delta N}{N}$$

علامت منفی به این منظور لحاظ شده است که تعداد هسته‌های پرتوزا با گذشت زمان کاهش می‌یابد

$$\Rightarrow \Delta N = -\lambda N \Delta t$$

ب)

با توجه به تعریف مشتق $\quad \frac{dN}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-\lambda N \Delta t}{\Delta t} = -\lambda N$

پ) با توجه به تعریف تابع نمایی و مشتق آن داریم:

$$N = a\exp(bt) = a e^{bt} \Rightarrow \frac{dN}{dt} = a b e^{bt} = bN$$

$$\Rightarrow \boxed{b = -\lambda} \qquad N(0) = N_0 = a e^{b \times 0} = a \Rightarrow a = N_0$$

$$\Rightarrow \boxed{N = N_0 e^{-\lambda t}}$$

ت) نیمه عمر یک ماده رادیواکتیو مدت زمانی است که در آن نیمی از هسته‌های اولیه واپاشیده شده باشند

$$N(\tau) = \frac{N_0}{2} \Rightarrow N_0 e^{-\lambda \tau} = \frac{N_0}{2} \Rightarrow e^{-\lambda \tau} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\lambda \tau = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 \Rightarrow \tau = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

۸

ت) با توجه به تعریف ثابت واپاشی، هسته مادر می‌تواند با احتمال λ_1 به هسته دختر نوع ۱ و با احتمال λ_2 به هسته دختر نوع ۲ واپاشیده شود.

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N = -(\lambda_1 + \lambda_2) N$$

ثابت واپاشی کل

$$\Rightarrow \quad N(t) = N_0 \, e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$$

حال فرض کنید $N_1(t)$، $N_2(t)$ به ترتیب تعداد هسته‌های دختر نوع ۱ و ۲ در زمان t باشند داریم:

$$N_0 = N(t) + N_1(t) + N_2(t)$$

$$\Rightarrow \quad N_1(t) + N_2(t) = N_0 \left(1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}\right)$$

با توجه به مفهوم احتمالاتی ثابت واپاشی داریم:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\lambda_1}{\lambda_2} N_2 + N_2 = N_0 \left(1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}\right)$$

$$\Rightarrow \quad N_2 \, \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_2} = N_0 \left(1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}\right)$$

$$\Rightarrow \quad N_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} N_0 \left(1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}\right)$$

به همین ترتیب برای N_1 $\Rightarrow \quad N_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} N_0 \left(1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}\right)$

ج) احتمال واپاشی هسته‌های پرتوزا $-$ آهنگ تولید تعداد هسته‌های پرتوزا $=$ آهنگ تغییرات تعداد هسته‌های پرتوزا

$$\Rightarrow \quad \frac{dN}{dt} = R - \lambda N$$

ج)

$$N(t) = \alpha + \beta e^{\gamma t} \Rightarrow \frac{dN}{dt} = \beta\gamma e^{\gamma t} = \gamma(\beta e^{\gamma t})$$

$$= \gamma(N(t) - \alpha)$$

$$= -\alpha\gamma + \gamma N(t)$$

با توجه به روابط قسمت ج داریم: $\begin{cases} -\alpha\gamma = R \\ \gamma = -\lambda \end{cases}$ بنابراین $\alpha = \frac{R}{\lambda}$

از طرفی $N(t=0) = 0$ بنابراین $\alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -\alpha = -\frac{R}{\lambda}$

$$\Rightarrow N(t) = \frac{R}{\lambda} - \frac{R}{\lambda}e^{-\lambda t} = \frac{R}{\lambda}(1 - e^{-\lambda t})$$

ح) با توجه به نمودار قسمت د، واپاشی خالص (از زمان 25 به بعد) در زمان تقریباً 28/75 نیمی از محصول تولید شده واپاشی کرده است بنابراین نیمه عمر این محصول حدود 3.75 ساعت می باشد بنابراین با توجه به رابطه $\tau = \frac{Ln2}{\lambda}$ داریم:

$$\lambda(h^{-1}) = \frac{Ln2}{\tau} \cong \frac{Ln2}{3.75} = \frac{0.69}{3.75} \cong 0.184\, h^{-1}$$

خ) با توجه به روابط قسمت ج می بینیم در درازمدت مقدار $N(t)$ به سمت $\frac{R}{\lambda}$ میل می کند و در نمودار این مقدار برابر است با 9×10^{12} اتم

$$\Rightarrow \frac{R}{\lambda} = 9\times10^{12} \Rightarrow R = 9\times10^{12}\lambda = 9\times0.184\times10^{12}\, h^{-1}$$

$$= 1.656\times10^{12}\, h^{-1}$$

د)

$$A = \text{اکتیویته} = \lambda N(t) = R(1 - e^{-\lambda t}) = 0.75 A_{max} = 0.75 R$$

$$\Rightarrow 1 - e^{-\lambda t} = \frac{3}{4} \Rightarrow e^{-\lambda t} = \frac{1}{4} \rightarrow -\lambda t = Ln\left(\frac{1}{4}\right)$$

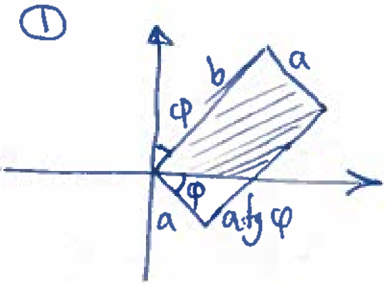
$$\Rightarrow \lambda t = Ln4 = 2Ln2 \rightarrow t = \frac{2Ln2}{\lambda} = 2\tau$$

(10)

پاسخ سؤالات مرحله دوم المپیاد فیزیک - دوره ۳۳ - تیرماه ۱۳۹۹

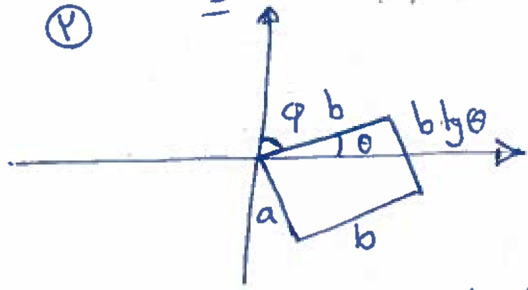
سؤال ۴) مساحت قسمت داخل میدان مغناطیسی قرار دارد بر حسب $\varphi = \omega t$ که زاویه دوران می‌باشد دارای عبارت به صورت زیر است:

(۱)



$$S = ab - \frac{1}{2}a^2 \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}a^2 - \frac{1}{2}a^2 \operatorname{tg}\varphi = a^2\left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi\right) \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{3}$$

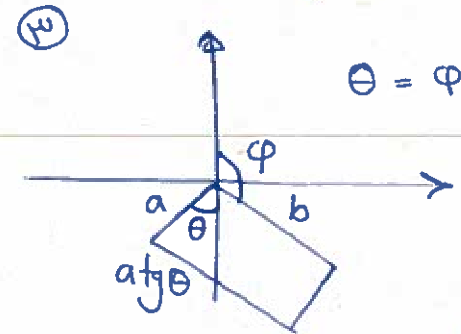
(۲)



$$\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

$$S = \frac{1}{2}b^2 \operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2}b^2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{3}{2}a^2 \cot\varphi \qquad \frac{\pi}{3} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$$

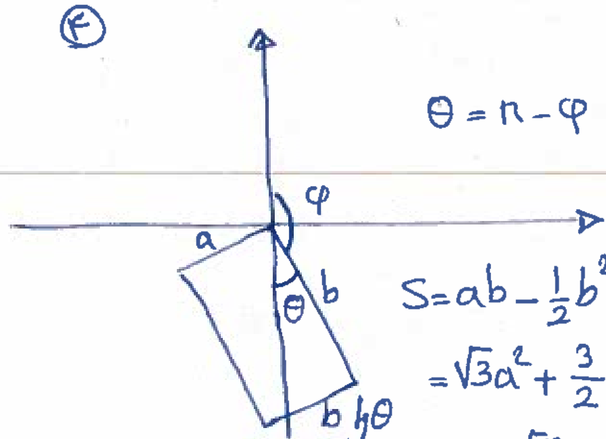
(۳)



$$\theta = \varphi - \frac{\pi}{2}$$

$$S = \frac{1}{2}a^2 \operatorname{tg}\theta = \frac{1}{2}a^2 \operatorname{tg}\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}a^2 \cot\varphi \qquad \frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{5\pi}{6}$$

(۴)



$$\theta = \pi - \varphi$$

$$S = ab - \frac{1}{2}b^2 \operatorname{tg}\theta = \sqrt{3}a^2 + \frac{3}{2}a^2 \operatorname{tg}\varphi \qquad \frac{5\pi}{6} \leqslant \varphi \leqslant \pi$$

آ) با توجه به مساحت‌های قسمت بالا داریم:

$$\Phi = BS = B_0 S = \frac{B_0 a^2}{2}\begin{cases} 2\sqrt{3} - \operatorname{tg}\varphi = 2\sqrt{3} - \operatorname{tg}(\omega t) & 0 \leqslant \omega t \leqslant \frac{\pi}{3} \\ 3\cot\varphi = 3\cot(\omega t) & \frac{\pi}{3} \leqslant \omega t \leqslant \frac{\pi}{2} \\ -\cot\varphi = -\cot(\omega t) & \frac{\pi}{2} \leqslant \omega t \leqslant \frac{5\pi}{6} \\ 2\sqrt{3} + 3\operatorname{tg}\varphi = 2\sqrt{3} + 3\operatorname{tg}(\omega t) & \frac{5\pi}{6} \leqslant \omega t \leqslant \pi \end{cases}$$

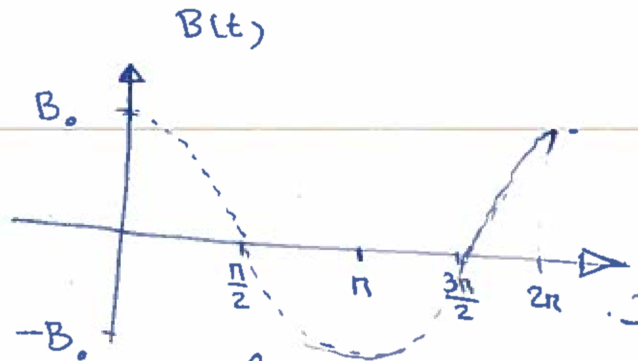
ب)

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{B_0 a^2 \omega}{2}\begin{cases} -(1 + \operatorname{tg}^2 \omega t) & 0 \leqslant \omega t \leqslant \frac{\pi}{3} \\ -3(1 + \cot^2 \omega t) & \frac{\pi}{3} \leqslant \omega t \leqslant \frac{\pi}{2} \\ (1 + \cot^2 \omega t) & \frac{\pi}{2} \leqslant \omega t \leqslant 5\pi/6 \\ 3(1 + \operatorname{tg}^2 \omega t) & \frac{5\pi}{6} \leqslant \omega t \leqslant \pi \end{cases}$$

پ) در این حالت هم میدان مغناطیسی تغییر کرده است (تغییرات زوایا مانند قبل است)

$$\Phi = \vec{B}\cdot\vec{S} = B_0 \cos\omega t\, S = \frac{B_0 a^2}{2}\begin{cases} 2\sqrt{3}\cos\omega t - \sin\omega t \\ 3\cos\omega t \cot\omega t \\ -\cos\omega t \cot\omega t \\ 2\sqrt{3}\cos\omega t + 3\sin\omega t \end{cases}$$

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{B_0 a^2 \omega}{2}\begin{cases} -2\sqrt{3}\sin\omega t - \cos\omega t \\ -3\left(\sin\omega t \cot\omega t + \cos\omega t\,(1+\cot^2\omega t)\right) \\ +\left(\sin\omega t \cot\omega t + \cos\omega t\,(1+\cot^2\omega t)\right) \\ -2\sqrt{3}\sin\omega t + 3\cos\omega t \end{cases}$$



ت)

در بازه $[0, \frac{\pi}{2}]$ میدان در جهت $\hat{k}$ (⊙) کاهش می‌یابد و مساحت نیز کاهش می‌یابد بنابراین میدان القایی برون‌سو ⊙ و جریان القایی پادساعتگرد است.

در بازه $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ مساحت در حال افزایش و میدان B در جهت درون‌سو ⊗ افزایش می‌یابد در این حالت هم میدان القایی باید برون‌سو باشد ⊙ بنابراین جریان پادساعتگرد است.

در حالت $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$ مساحت در حال کاهش و میدان درون‌سو ⊗ در حال کاهش است. در این حالت میدان القایی باید درون‌سو باشد ⊗ بنابراین جریان ساعتگرد است.

در بازه $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ مساحت در حال افزایش و میدان بیرون‌سو هم در حال افزایش است بنابراین میدان القایی باید ⊗ باشد بنابراین جریان ساعتگرد است.

پاسخ سؤالات مرحله دوم المپیاد فیزیک - دوره ۳۳ ام - آبان ۱۳۹۹

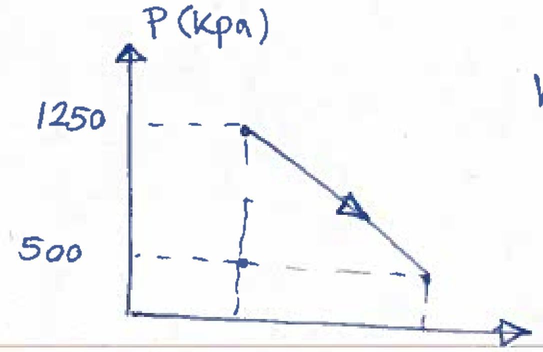
ه)

آ) $W_{\text{ترمودینامیکی}} = 75\% K \Rightarrow (P-P_0)\Delta V = \frac{3}{4}\times\frac{1}{2}mV^2$

$V = 150\times 1.8\times\frac{10}{36}\ m/s = 75\ m/s \Rightarrow \Delta V = \frac{3mV^2}{8(P-P_0)} = \frac{3\times18\times10^3\,(75)^2}{8\times 1150\times10^3}$

$\Rightarrow \Delta V = \frac{3\times18\times75^2}{8\times1150} = 33.01 \simeq 33\ (m^3)$

ب)



$W_{thermo} = \left(\frac{P_1+P_2}{2}\right)\Delta V = P_0\Delta V + \frac{3}{4}\times\frac{1}{2}mv^2$

$\Rightarrow \left(\frac{P_1+P_2}{2} - P_0\right)\Delta V = \frac{3\times18\times10^3\times(75)^2}{8}$

$\Rightarrow \left(\frac{1750}{2} - 700\right)^{kpa}\Delta V = \frac{54\times10^3\times75^2}{8}$

$\Rightarrow \Delta V = \frac{54\times10^3\times75^2}{4\,(1550)\times10^3} = 48.99 \simeq 49\ m^3$

پ) $P = aV + b \Rightarrow a = \frac{\Delta P}{\Delta V} = \frac{(1250-500)\times10^3}{-49} \simeq -15.3\times10^3$

$b = P - aV = 1250\times10^3 + 15.3\times10^3\times50 = (1250+765)\times10^3$

$= 2015\times10^3$

$\Rightarrow P(kpa) = -15.3\,V_{(m^3)} + 2015$

ت) $V_2 = V_1 + \Delta V = 50 + 49 = 99\ m^3$

$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2V_2}{P_1V_1} = \frac{500\times99}{1250\times50} = \frac{99}{125} \Rightarrow T_2 = \frac{99}{\cancel{125}}\times\overset{4}{\cancel{500}} = 396\ K$

۱۳

ب)

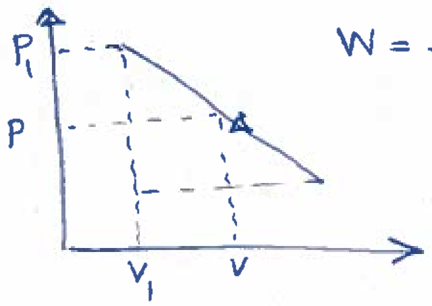
$$PV = nRT \Rightarrow T = \frac{1}{nR}PV = \frac{1}{nR}(aV+b)V = \frac{1}{nR}(aV^2+bV)$$

$$\frac{dT}{dV} = 0 \Rightarrow 2aV + b = 0 \Rightarrow V = -\frac{b}{2a} = +\frac{2015}{2\times 15.3} = 65.8 \cong 66$$

$$\Rightarrow P = aV + b = -15.3\times 65.8 + 2015 = +1008.26 \cong 1008\ \text{kPa}$$

$$\Rightarrow T_m = \frac{PV}{P_1V_1}T_1 = \frac{1008\times 66}{1250\times 50}\times 500 = 532.2 \cong 532\ \text{K}$$

ت)



$$W = -S \Rightarrow \Delta U = Q + W = Q - S$$

$$\Rightarrow nC_v\Delta T = Q - S$$

$$\Rightarrow Q = nC_v\Delta T + S$$

$$\Rightarrow Q = \frac{7}{2}nR(T - T_1) + \frac{1}{2}(P + P_1)(V - V_1)$$

$$= \frac{7}{2}(PV - P_1V_1) + \frac{1}{2}(PV - PV_1 + P_1V - P_1V_1)$$

$$Q\ (\text{kj}) = 4PV - 4P_1V_1 - \frac{V_1}{2}P + \frac{P_1}{2}V$$

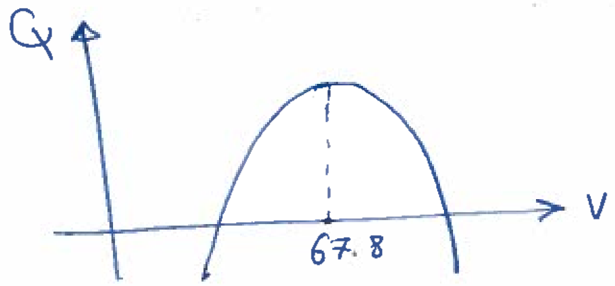
$$= 4(aV+b)V - 4\times 1250\times 50 - \frac{50}{2}(aV+b) + 625V$$

$$= 4(aV^2+bV) - 250\times 10^3 - 25(aV+b) + 625V$$

$$= 4aV^2 + (4b - 25a + 625)V - (250\times 10^3 + 25b)$$

$$Q\ (\text{kj}) = -61.2V^2 + 8302.5V + 300375$$

$$\frac{dQ}{dV} = 0 \Rightarrow -122.4V + 8302.5 \Rightarrow V = 67.8$$



۱۴

پاسخ سؤالات مرحله دوم المپیاد زمین‌شناسی - دوره ۳۳ - تیر ۹۹ ۱۳۹۹

۴

آ) برای حل سؤال معتبر است ابتدا در پاسخ نامه ارتفاع نقاط نوشته شود و سپس نقاط مشخص گردد.

نقشه $\Delta d_{min} = 1mm$ $\quad$ $\dfrac{\Delta h_{max}}{\Delta d_{min}} = $ شیب شدید $\Leftarrow$ $\dfrac{\text{اختلاف ارتفاع}}{\text{مسیر}} = $ شیب

$$\Rightarrow \quad m_{max} = \frac{100m}{0.1\times 2000} = \frac{100}{200} = 1/2 = 0.5 = 5\times10^{-1}$$

$$h_C = 1000\,m$$

ب) روی نقشه مشخص شده است.

پ) برای F_{max} باید نسبت توان به سرعت بیشینه شود.

$$P = F.V \Rightarrow F_{max} = \left(\frac{P_{\text{بیشینه}}}{V}\right)_{max}$$

$$F_{max} = \frac{1}{10}\left(\frac{P}{V}\right)_{max}$$

با توجه به نمودار داریم: $P \cong 285\,hp$ و $V \cong 29\,Km/h$

$$\Rightarrow F_{max} = \frac{1}{10}\ \frac{285\times 735}{29\times\frac{10}{36}} = 2600.4\,N \cong 2.6\times10^{3}N$$

ت) روی سطح شیبدار نیروی $mg\sin\theta$ به سمت پایین به اتومبیل وارد می‌شود. اگر اتومبیل با سرعت ثابت حرکت کند بیشترین شیب زمانی است که $mg\sin\theta = F_{max}$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{F_{max}}{mg} = \frac{2600.4}{2\times10^{3}\times10} = 0.13 = 1.3\times10^{-1} \quad \sin\theta \ll 1$$

$$\Rightarrow \quad tg\,\theta \cong \sin\theta \cong 0.13 = 1.3\times10^{-1}$$

ج) شیبی که اتومبیل می‌تواند بالا برود $= 0.77\times0.13 \cong 0.1 = 1\times10^{-1}$

یعنی $tg\,\theta \cong 0.1$ است بنابراین $\dfrac{\Delta h}{\Delta d} \cong 0.1$

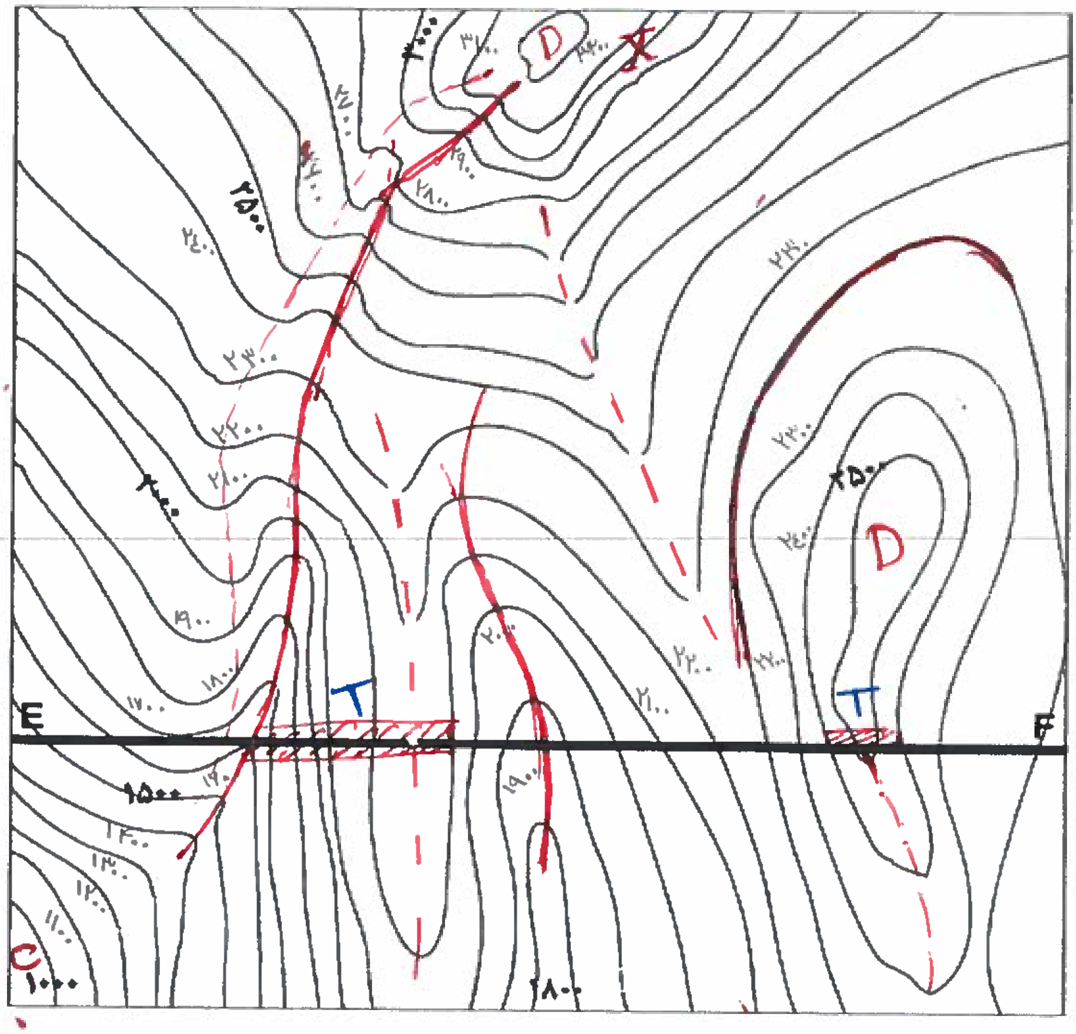
$$\Rightarrow \quad \frac{100}{\Delta d} \cong 0.1 \Rightarrow \Delta d \cong 1000m = 1\,Km$$

بنابراین اگر در طی مسیر به ازای $100\,m$ تغییر ارتفاع مسافتی کمتر از $0.5\,Km$ روی نقشه باشد باید تونل در آن زده شود.

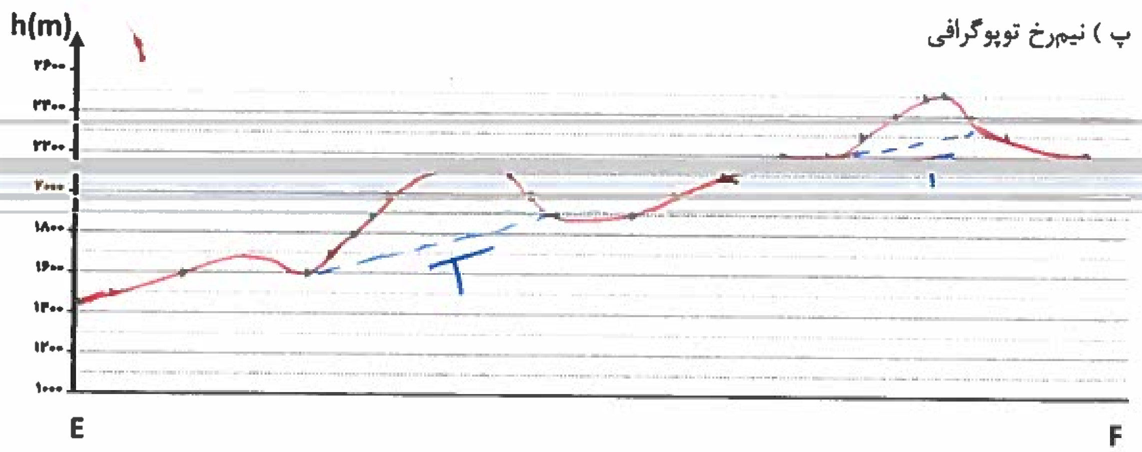
۱۵

این برگ قسمتی از پاسخ نامه است. دقت کنید که تصویر پاسخ نامه دچار خط‌خوردگی نشود.

هریک سانتی متر روی نقشه معادل ۲ کیلومتر واقعی است. ارتفاع‌های ذکرشده در نقشه برحسب متر است.



پ) نیم‌رخ توپوگرافی



پاسخ سؤالات مرحله دوم المپیاد فیزیک - دوره ۳۳ - تیرماه ۱۳۹۹

سؤال ۷)

آ) $R = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dl} \cdot \frac{dl}{dt} = Q \cdot S$

ب) با توجه به اینکه سرعت ثابت است بنابراین در طول مسیر R هم مقدار ثابتی دارد و بنابراین Q هم ثابت است.

$$R = \frac{dV}{dt} \Rightarrow \quad dV = R\,dt = \frac{R}{S}\,dl$$

$$\Rightarrow \Delta V = \frac{R}{S}\Delta l$$

با توجه به اینکه $\Delta l = 100^{km}$ می‌باشد بنابراین ΔV هنگامی کمترین مقدار است که نسبت R/S کمترین مقدار را باشد یعنی شیب خط واصل از مبدأ به نقطه مورد نظر کمترین مقدار باشد (که عمود بر بالای این خط مماس باشد).

$$\Rightarrow S_c \cong 50\ km/h \Rightarrow R \cong 180 \times 10^{-5}\ lit/s$$

پ)

$$\Delta V = \frac{R}{S_c}\Delta l = \frac{180 \times 10^{-5}\ \frac{lit}{s}}{50\ km/h \times 10/36} \cdot 100 \times 10^3\ m$$

$$= \frac{180 \times 10^{-5} \times 36 \times 10^3}{5} = \frac{18 \times 36}{5} \times 10^{-1}\ lit = 12.96\ lit \cong 13\ lit$$

$= 1.3 \times 10$

ت)

$$S_{max} = 130\ \frac{km}{h} \qquad R = 700 \times 10^{-5}\ lit/s$$

$$\Rightarrow \Delta V = \frac{R}{S}\Delta l = \frac{700 \times 10^{-5}}{130 \times 10/36} \times 10^5 = \frac{7 \times 36}{13}\ lit \cong 19.4 \cong 19\ lit$$

$= 1.9 \times 10$

درصد افزایش سوخت $= \frac{19 - 13}{13} \times 100 \cong 46\%$

ث)

$$Q = \frac{R}{S}$$

$R\,(lit/s)$	375	125	180	550	700
$S\,(km/h)$	10	25	50	110	130
$Q\,(lit/km)$	1.35	0.18	0.13	0.18	0.19

ج)

$$\Delta V = (1+\beta a) R \Delta t = (1+\beta a) R \frac{\Delta S}{a}$$

چ) در محدوده مورد نظر تغییرات R برحسب S خطی است

$$\Delta V = \frac{(1+\beta a)}{a} \underbrace{\int R\, dS}_{\text{مساحت زیر نمودار}}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta V = \frac{(1+\beta a)}{a} \left(\frac{R_1 + R_2}{2}\right)(S_2 - S_1)$$

$$= \left(\frac{1+0.5\times 1.5}{1.5}\right)\left(\frac{470+700}{2}\right)\times 10^{-5}\left(30\ \frac{km}{h}\right)$$

$$\cong 0.057\ lit = 5.7\times 10^{-2}$$

۱۸

این شکل جزء پاسخ سؤال ۷ است.

پاسخ بخش ث): نمودار مصرف سوخت اتومبیل (Q) بر حسب سرعت (S)